



بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله الذي اخترع الاشياء في غاية الاحكام • وبهر العقول بما فيها من بدائع
الانتظام • ألم تر الى السقاء كيف يشاها • رفع سمكها بلا عمد فسواها • واطمئن
ليلمها واخرج ضيائها • والارض بعد ذلك دحاها • اخرج منها ماءها ومرعاها •
والجبال أرساها • ان في ذلك لآيات لاولى الالباب • وارشادات عن ليل الخطا
الى نهج نار العواب • والصلاة والسلام على منبج ينابيع الحكمة والكمال •
ومسقط نقطة قلم الرسالة والجلال • مركز دائرة الوجود • ومطلع شمس التقى
والجود • سيدنا محمد الذي بعث بالكمال الفضائل رحمة للعالمين • وعلى آله
الذين تنزه جوهر عنصرهم عن عرض بشين • (أما بعد) فيقول العائد بزبره من كل
وجه • المعتمد عليه في جميع شؤونته محمد عصيه • انه لما صدر الامر الواجب
الامتثال • من سدة صاحب السعادة والاقبال • سبق الله في أرضه • القائم
له بسنته وفرضه • رئيس رؤساء الصاكر الجهادية • وطرار العصابة الجهادية •

حضرة الجنب الاكرم • والوزير الانعم • الحاج ابراهيم باشا صاحب الفتوحات •
والنصر الذي لم يزل منشورا لرايات • سلالة الجنب المعظم • والنديوي الاعظم •
الذي ادنى مناقبه اخرس البلغاء عن مقال • وان حسن في ذلك قول
من قال

ماذا أقول وكيف القول فيك • قد فاق كل ملوك الاعصر الاول
محمد انت ان احمدك ميتا • وان طلبت لك العليا أنت على

كيف لا وقد تغنت بحسه الورق على اغصان الايك • وكان ذلك الامر
صادرا الى حضرة أمير اللواء ادهم بك • حبر العلوم الرياضية • ومدير عموم
المهمات الحربية • ومركز دوائر افلاك الصناعات العلمية والعملية • ومضمون
ذلك الامر انه يترجم كتاب اصول الهندسة • الجامع المختص ما وضعه • كل
مهندس من القدماء وأسس • الذي ألفه فيلسوف زمان • وفر يد نظرائه
واقرائه • المهندسين لئلا يذللوا ويراوا في فرنسا وان تكون ترجمته من اللغة
الفرنساوية • الى اللغة التركية • وذلك لما اشغل عليه من كثرة المعاني • وقلة
الافاظ والمباني • مع ما اختلف به من حسن الترتيب • وسهولة الاسلوب الغريب
وان ينتخب لتعليقه اثني عشر فخريرا من اوردى الرجال • يكون ثاقب فكرهم
في غاية الجودة والكمال • فبادر حضرة البيك الموصي اليه باعتقال ذلك الامر
وسارع في انتخاب الجماعة موافقين لعدة الشهور وفي القدر • وشرع في الترجمة
والتهام • وتحقيق معاني ذلك الكتاب على طريق مستقيم • وكنت ممن
انتظم في سلك أولئك الجماعة • وحصل كل مناع على قدر ما له من البراءة • ثم أمر
حضرة المشار اليه ان يترجم من اللغة التركية • الى اللغة العربية • ليعم نفعه بجميع
الانام • ويكون زيادة في الاسلام • وكنت بحمد الله انتقلت دراسته غاية
الاتقان • بما أوضحه • حضرة البيك المشار اليه من يدبغ البيان • لافق حالة
التعليم • جعلت أداني صدقا لا كى كلمة • وقلبي وعاء لا تقاط الدرون فيه • فبادرت
الى ترجمته كما أمر • مستعينا بما اتقوا والقوى والقدر • وهذا أو ان الشروع في
المرام • ونسال الله حسن الختام •

(مقدمة)

هذا الكتاب يشتمل على ثمان مقالات الاربع الاولى منها يبحث فيها عن الاشكال المسطحة والخطوط المرسومة على السطوح المستوية والمقالة الاولى لها ملحقات اخذت من اصول المهندس لا قوروا وهو من اشتهر مهندسى فرانس ليكونها سهلة على المبتدى واندرجت عقبها وسعت ملحقات المقالة الاولى والمقالة الثانية يبحث فيها عن تعريف الدوائر ومعادير الزوايا والمقالة الثالثة يبحث فيها عن المثلثات المتشابهة ويذكر في حدودها بعض خصائص النسبة والتناسب ويذكر ايضا في بعض نتائج دعاواها من علم الجبر والمقابلة ما يدل على ان برهان الهندسة قطعي والمقالة الرابعة يبحث فيها عن مساحة الاشكال المنتظمة والدوائر وما يليها والمقالة الخامسة يبحث فيها عن السطوح المستوية والزوايا المجسمة والمقالة السادسة يبحث فيها عن الاجسام المحاطة بسطوح مستوية والمقالة السابعة يبحث فيها عن المثلثات الكروية وما يخصها من التفاصيل والمقالة الثامنة يبحث فيها عن الاجسام المحاطة بسطوح منحنية ولكل من الثمان مقالات دعاوى عملية مثبتة بواسطة الدعاوى النظرية فبعض الدعاوى العملية يأتي مستقلا عقب مقالاته وبعضها مندرج في مقالاته ومن اجل اشغال هذه الاصول على البراهين القطعية الممدة للاذهان كان كل طالب علم في تلك الديار واجبا عليه ان يطلع عليها لم يفهم من توسعة مبادئ الافهام وتدريبها على ادراك اسرار معاني الكلام ونفعوية العقول وتصفية الافكار وجودة

يقول القدير على
افيدى عزت في
هذه الطبعة الثالثة
قد حذفت ملحقات
المقالة الاولى ونصفها
الاخير وجعلت
بليها النصف الاخير
عن المقالة الاولى
من كتاب المهندس
بلى لكونها سهلة
جددا على المبتدى
إد

القرايح ودقة الانتظار حتى ان أهل تلك الديار يرون

انها اولى ما لقنوه الصبيان ويحافظون

على دراستها حافظين

على تداولة

ام القرآن

هذا كتاب الخبة العزبة

في تهذيب الاصول الهندسية

تأليف أصل هذا الكتاب فيلسوف زمانه وفريد نظرأته وأقرانه من هؤلاء كاه

مكي المهندس الشهير بلاندرالفرنساوي

هذه الطبعة الثالثة بأمر سعادتمدير المدارس الملكية والاشغال العمومية

التي على باشا مبارك وتنقيح معلم علم الاستاتيك وعلم الديناميك وعلم

الهندسة بمدرسة المهندسخانة الخديوية - حضرة علي أفندي عزت ونصيح

نصيح بالمطبعة البنية حضرة الشيخ ابراهيم عبدالغفار الدوقي

بالمطبعة الكبرى يولاني ١٢٨٨ هـ على صاحبها افضل الصلاة

وأزكى التحية

(المقالة الاولى من اصول الهندسة)

❖ (بيان الحدود الاسمية) ❖

١ الهندسة علم يبحث فيه عن مقدار الامتداد اى مساحته والامتداد هو الابعاد الثلاثة وهى الطول والعرض والارتفاع والعمق

٢ الخط طول بلا عرض ولا عمق وكل من نهايتى الخط يسمى نقطة والنقطة لا امتداد لها

٣ الخط المستقيم هو اقرب بعدين النقطتين

٤ كل خط ليس مستقيما ولا مركبا من خطوط مستقيمة فهو خط منحنى والخط الذى يتركب من خطوط مستقيمة فهو خط منكسر ففى (شكل ١) خط $a - b$ يسمى مستقيما وخط $a - b - c$ يسمى منكسرا وخط $a - b - c - d$ يسمى منحنيا

٥ السطح ماله طول وعرض فقط

٦ السطح المستوى هو السطح الذى يمكن ان ينطبق عليه خط مستقيم فى أى جهة من جهاته انطباقا تاما

٧ كل سطح ليس مستويا ولا مركبا من سطوح مستوية فهو سطح منحنى

٨ الجسم ماله ابعاد ثلاثة الطول والعرض والعمق

٩ (شكل ٢) الزاوية هى الانقراج الحاصل من تلاقى خطين مستقيمين

الانقراج مثلا الذى بين خطى $a - b$ و $a - c$ يسمى زاوية ونقطة a التى هى ملتقى الخطين تسمى رأس الزاوية وخطا $a - b$ و $a - c$ يسمىان ضلعا الزاوية

الزاوية تارة تسمى بحرف واحد وهو الذى عند رأسها وتارة تسمى بثلاثة حروف بحيث يكون الحرف الذى يذ كر متوسطا لاعلى رأس الزاوية فمثل $a - b - c$

الزاوية تقبل الجمع والطرح والضرب والقسمة كسائر المقادير مثلا زاوية $a - b - c$ هى مجموع زاويتي $a - b$ و $b - c$ وزاوية $a - c$ هى

في روايتي ٢ هـ و ٢ هـ (شكل ٢٠)

١٠ اذا تساوت زاويتا a و b المتجاورتان الحادتان
جبايتي خط a - التلاقي بخط c فكل واحدة من هاتين الزاويتين
تسمى قائمة ويقال ان خط a - عمودي على c (شكل ٢)

١١ الزاوية الحادة ما كانت أصغر من القائمة فهو زاوية حادة
والمفرجة ما كانت أكبر من القائمة فهو زاوية حادة و (شكل ٤)

١٢ الخطان المتوازيان خطان في مستوى واحد لا يلتقيان أصلا اذا امتدتا مثل
خطي a - و c (شكل ٥)

١٣ الشكل المستوي هو سطح مستو محيطت جميع أطرافه بخطوط
فان كانت تلك الخطوط مستقيمة يسمى ذلك الشكل شكلا مستقيما اضلاع
أو مضعلا مستويا وتسمى تلك الخطوط محيط الشكل أو اضلاع الشكل (شكل ٦)
١٤ أبسط الاشكال المستقيمة الاضلاع ما كان ذا ثلاثة اضلاع ويسمى مثلثا
وان كان للشكل المستقيم الاضلاع أربعة اضلاع يسمى ذا أربعة اضلاع وان
كانت أضلاعه أكثر من أربعة يسمى كثيرا الاضلاع فان كان كثيرا الاضلاع
ذا خمسة اضلاع يسمى خمسا وان كان ذا ستة يسمى ستسا وان كان ذا سبعة
يسمى سبعا وهكذا الخ

١٥ المثلث يسمى متساوي الاضلاع اذا تساوت أضلاعه الثلاثة (شكل ٧)
ومتساوي الاقن اذا تساوى ضلعا فقط (شكل ٨) ومختلف الاضلاع
اذا اختلفت أضلاعه الثلاثة (شكل ٩)

١٦ المثلث يسمى قائم الزاوية اذا كانت إحدى زواياه قائمة والضلع الذي
يقابل تلك القائمة يسمى وتر القائمة فليذا مثلث a - b الذي زاويته a قائمة
يسمى مثلثا قائم الزاوية وضلع c - وتر القائمة (شكل ١٠)

١٧ لتذكر انواع الشكل المسمى ذا أربعة اضلاع فنقول
منه المربع وهو ما كانت جميع أضلاعه متساوية وزواياه قائمة (شكل ١١)
ومنه المستطيل وهو ما كانت أضلاعه المتجاورة متطابقة وكانت جميع زواياه

قائمة (شكل ١٢)

ومن المتوازي الاضلاع وهو ما كانت أضلاعه المتقابلة متوازية (شكل ١٣)
ومنه المحين وهو ما كانت أضلاعه متساوية بدون ان تكون زواياه قائمة

(شكل ١٤)

ومن شبه المنحرف وهو ما كان فيه ضلعان متوازيان فقط (شكل ١٥)

١٨ الخط المستقيم الموصول بين زاويتي ذى أربعة أضلاع أو كثير الاضلاع
دون المتجاورتين يسمى قطر الشكل مثلاً خط ١٦ هو قطر (شكل ١٢)

١٩ كل شكل مستقيم الاضلاع اذا تساوت أضلاعه يسمى متساوي الاضلاع
ويسمى متساوي الزوايا اذا تساوت زواياه

٢٠ الشكلان المستقيمان الاضلاع يسمىان متساوي الاضلاع المتناظرة اذا
تساوت أضلاعهما المتناظرة وكان كل منهما على قلم واحد يعنى اذا كان
الضلع الاول من أحدهما مساويا للآخر من الثانى والثالث للثالث
وهكذا الخ. ويسميان متساوي الزوايا المتناظرة اذا تساوت فيهما الزوايا المتناظرة
كلاضلاعه وبهذين الوجهين تسمى الاضلاع المتساوية أضلاعاً متناظرة
والزوايا المتساوية تسمى زوايا متناظرة

(تنبيه) الاربعة المقالات الاول يبحث فيها عن الاشكال المسطحة والخطوط
المرسومة على السطح المستوى

بيان الاصطلاحات والعلامات المشتملة عليها هذه الاصول

العلوم البدئية هي القضايا التي تكون مبنية بنفسها أى لا تحتاج الى اثبات

الدعوى النظرية هي القضية المسئلة بواسطة البرهان

الدعوى العملية هي المسئلة التي يراد حلها بالعمل

القاعدة هي القضية المعينة على اثبات دعوى نظرية أو مسئلة

القضية اسم يطلق على الدعوى النظرية والعملية والقاعدة

النتيجة هي الثمرة التي تظهر من قضية أو جملة قضايا تقدمت

التبعية ما يفهم منه فائدة الدعوى التي تقدمت وارتباطها بغيرها وغايتها
القروض هي الموضوعات التي تفرض في تقرير قضية أو في أثناء برهان

العلامات

هذه العلامة = تسمى علامة التناوي فكاتبه = معناها التناوي -
وليبيان أن مقداراً أصغر من مقدار - يكتب $a > b$ - وليبيان أن الأكبر
من - يكتب $a < b$ -

وهذه + العلامة تسمى علامة الزائد وتدل على الجمع وهذه الإشارة - تسمى
علامة الناقص وتدل على الطرح فكاتبه + - تدل على حاصل جمع كتيبي أو
- وكاتبه - - تدل على فرقهما أي على الباقي من طرح الكمية - من
الكمية + وكاتبه - - أو + - - تدل على أنه ينبغي
جمع أو - ثم طرح - من حاصل جمعهما

وهذه \times العلامة تدل على الضرب فلذا $a \times b$ - يشير إلى حاصل ضرب
مقدار a في مقدار b وقد استعمل بعضهم نقطة عوضاً عن تلك العلامة فهو
 $a \cdot b$ - يعني $a \times b$ - وقد توضع $a - b$ بدون علامة الضرب وبدون
نقطة بالاتصال فتدل على الضرب مثل $a - b$ يعني $a \times b$ -
وحينئذ لم يعن به الحرفان a و b إلا أن على نهاية خط كما يقال خط a - وأيضاً
هذه الجمللة أعني $a \times (b + c - d)$ تدل على حاصل ضرب مقدار a
في الكمية المركبة التي هي $b + c - d$ وهذه الجمللة أعني
 $(a + b - c) \times (d - e + f)$ إشارة إلى ضرب مقدار a في
 $a + b - c$ في كمية $d - e + f$

ما كتب بين قوسين هكذا () قليلاً كان أو كثيراً يعتبر مقداراً واحداً
وإذا وضع عدد على عين خط أو قوسكم دل على ضرب ذلك العدد أو الكم في ذلك
العدد الموضوع مثلاً $3a$ - إشارة إلى أخذ ثلاثة أمثال خط
 a و $\frac{1}{2}a$ يدل على أخذ نصف زاوية a وهذه $\frac{1}{2}$ إشارة

المربعين مربع خط a - b $\frac{a}{b}$ أيضا يدل على تعيين $\frac{a}{b}$ من خط
 ١ - وصفا في التريبع والتكعيب تذكر تفصيلا في عملها
 وهذه $\sqrt{2}$ علامة تدل على الجذر فلذا $\sqrt{2}$ يدل على جذر مربع
 عدد ٢ وايضا $\sqrt{1}$ - يدل على جذر حاصل ١ \times - أو إشارة
 الى استخراج الوسط للنسب الهندسي بين مقدارى a و b -

(القضايا البديهية)

- ١ يتساوى المقداران اذا كان كل واحد منهما مساويا للمقدار الواحد
- ٢ الكل أعظم من جزئه
- ٣ الكل يساوى مجموع أجزائه
- ٤ لا يمكن وصل خطين مستقيمين بين نقطتين
- ٥ المقداران يساويان متساويين لهما اذا كان انطبق أحدهما على الآخر
 انطبقا تاما سواء كان هذان المقداران خطين أو سطحيين أو جسميين

الدعوى الاولى النظرية

(الزوايا القائمة كلها متساوية (شكل ١٦))

مثلا اذا كان خط a - b المستقيم هو دلى على خط a - b وخط c - d عودا
 على a - b وتكون زوايا a - b و c - d القعتان متساويتين لانه
 لو أخذت الابعاد الاربعه متساوية وهى a و b و c و d و e و f
 لكان بعد a - b مساويا لبعده c - d ومن هذا يمكن وضع خط a - b على
 خط c - d بأن تكون نقطة a على نقطة c ونقطة b على نقطة d
 وسيتبين ان الزاوية المذكورة انما تكون متساويتين والى ذلك يمكن ان يوجه خطين
 مستقيمين بين نقطتي a - b وهذه الخط (بديهية ٤) وتكون نقطة c التي
 هي وسط خط a - b و متطابقة على نقطة d التي هي وسط خط c - d ومن
 هذا يمكن ان يكون خط a - b متطابقا على خط c - d وأيضا ينطبق ضلع c - d

على α فان قيل لم يتبين ضلع $ر ح$ على β بل يكون خارجا عنه
 باستقامة γ ط - اوجب بأنه لو كان ضلع $ر ح$ واقعا على β لكان
 يلزم أن تكون زاوية α γ ط مساوية لزاوية β γ ط لانهما عين زاويتي
 $هـ ر ح$ و $ر ح و$ $ر و$ التساويتين ولكن زاوية α γ ط أكبر من زاوية α δ $ر$
 أو محاساها وهي زاوية δ γ $ر$ وأيضا زاوية δ γ $ر$ أكبر من زاوية
 β γ $ر$ فلذا تكون زاوية α γ ط أكبر من زاوية β γ $ر$ فيقتضى
 أن تكون زاويتا α γ ط و β γ $ر$ متساويتين وغير متساويتين
 وهذا خلف

فيلزم أن يقع ضلع $ر ح$ على δ وتطبق زاوية α δ $ر$ على زاوية $هـ ر ح$
 ويثبت تساوى كل الزوايا القائمة ببعضها (بديهية ٥) وهذا ما أردنا إثباته

الدعوى ب النظرية

مجموع زاويتي α δ $ر$ و β γ $ر$ المتجاورتين الحادثتين بجانب خط γ $ر$
 المستقيم المتلاق بخط α - يكون مساويا للقائمتين (شكل ١٧)
 لانه لو جعل خط γ $ر$ عمودا على خط α - في نقطة γ لكانت زاوية
 α δ $ر$ مجموع زاويتي α $هـ ر هـ$ و $هـ ر هـ$ ومن هذا يكون α δ $ر$ +
 β γ $ر$ = α $هـ ر هـ$ + $هـ ر هـ$ + β γ $ر$ لكن زاوية α $هـ ر هـ$
 قائمة ومجموع زاويتي $هـ ر هـ$ و β γ $ر$ هو زاوية β γ $ر$ القائمة الاخرى
 فلذا لزم أن يكون مجموع زاويتي α δ $ر$ و β γ $ر$ مساويا قائمتين وهذا
 ما أردنا اثباته

(تبيية ١٦) زاويتا α δ $ر$ و β γ $ر$ المتجاورتان اذا كانت احدهما
 قائمة تكون الاخرى قائمة

(تبيية ١٧) (شكل ١٨) اذا كان خط δ $ر$ عمودا على α - فكذلك يكون
 خط α - عمودا على δ لانه من كون δ $ر$ عمودا على α - يلزم أن
 تكون زاوية α δ $ر$ قائمة ولذا تكون مجاورتها هي α $هـ ر هـ$ قائمة كافي

المثلثان يكونان متساويين إذا كان في كل منهما زاوية مساوية لنظيرتها من الآخر ومنه تنصرت بين ضلعين كل منهما مساو لنظيره من الآخر

أى إذا كانت الزاوية $ا =$ للزاوية $د$ والضلع $ا - ر =$ للضلع $د ه$ والضلع $ا ح =$ للضلع $د و$ ويكون المثلث $ا - ر - ح$ للمثلث $د ه و$

(برهانه) أنه لو وضع المثلث $ا - ر - ح$ على المثلث $د ه و$ بحيث ينطبق الضلع $ا - ر$ على مساويه $د ه$ ولوقت النقطة $ا$ على النقطة $د$ والنقطة $ر$ على النقطة $ه$ وحيث أن الزاوية $ا =$ للزاوية $د$ يقع الضلع $ا ح$ على مساويه $د و$ والنقطة $ح$ على النقطة $و$ فينطبق الضلع $ا ح$ على الضلع $د و$ فيكون المثلث $ا - ر - ح$ على المثلث $د ه و$ فيكونان متساويين وهذا هو المطلوب

وينتج من هذه النظرية أنه إذا تساوى ضلعان وزاوية بينهما من مثلث ضلعين وزاوية بينهما من مثلث آخر كل نظيره تساوت بقية أجزائه أحدهما ببقية أجزاء الآخر

أى إذا كان الضلع $ا - ر =$ للضلع $د ه$ والضلع $ا ح =$ للضلع $د و$ والزاوية $ا =$ للزاوية $د$ تكون الزاوية $ر =$ للزاوية $ه$ والزاوية $ح =$ للزاوية $و$ والضلع $ر - ح =$ للضلع $ه و$

(الدعوى من النظرية شكل ٢٣)

يتساوى المثلثان إذا تساوى من كل منهما ضلعان والزاويتان المجاورتان له كل نظيره

أى إذا كان الضلع $ا - ر =$ مساويا للضلع $د ه$ والزاوية $ر =$ مساوية للزاوية $ه$ والزاوية $ح =$ مساوية للزاوية $و$ ويكون المثلث $ا - ر - ح$ مساويا للمثلث $د ه و$

(برهانه) أنه لو وضع المثلث $ا - ر - ح$ على المثلث $د ه و$ بحيث ينطبق الضلع $ا - ر$ على مساويه $د ه$ ولوقت النقطة $ا$ على النقطة $د$ والنقطة $ر$ على النقطة $ه$ وحيث أن الزاوية $ر =$ للزاوية $ه$ يقع الضلع $ا ح$ على الضلع $د و$

ونقع النقطة α على إحدى نقط الخط de وحيث أن الزاوية $\angle =$ للزاوية
ويقع الضلع ac على الضلع de ونقع النقطة α على إحدى نقط الخط de ونقع
نقع النقطة α على النقطة de بهذا ينطبق المثلث ade على المثلث deh و
ويساويه وهذا هو المطلوب

نتيجة إذا تساوى زواويتان مجاورتان له من مثلث ضلع او زاويتين مجاورتين له
من مثلث آخر كل نظيره تساوت بقية أجزائه أحدهما بقية أجزاء الآخر كل
بنظيره أى إذا كان الضلع de مساويا للضلع de و الزاوية \angle مساوية
للزاوية de و الزاوية \angle مساوية للزاوية de وكانت الزاوية \angle مساوية للزاوية de
والضلع ae مساويا للضلع de و الضلع ae مساويا للضلع de

(الدعوى ج النظرية شكل ٢٣)*

أى ضلع من أى مثلث أصغر من مجموع الضلعين الآخرين وهو أكبر من فاضلهما
أى أن الضلع ae من المثلث ade أصغر من مجموع الضلعين de و de
وأ أكبر من فاضلهما

(برهان القضية الأولى) أن الخط المستقيم ae أصغر من الخط المنكسر ade
المار بنهايتي المستقيم a و e

(وبرهان الثانية) أن الضلع de $> ae + de$ فاذا طرح ae من كل
من الطرفين بقى $de - ae > de - ae$ أى $de > de$ وهو المطلوب

(الدعوى ط النظرية شكل ٢٤)*

إذا أخذت نقطة داخل مثلث ووصل منها إلى نهايتي أحد أضلاعه مستقيمان
فمجموع المستقيمين المذكورين يكون أصغر من مجموع الضلعين الباقيين من
المثلث أى إذا أخذت نقطة مثل h داخل مثلث مثل ade ووصلتها إلى
نهايتي الضلع de مستقيمان ah و eh و كان مجموع الخطين ah و
 eh أصغر من مجموع الضلعين ae و de

(برهانه) ان يقال لو مد أحد المستقيمين ah على استقامته جهة h حتى قطع
الضلع de في نقطة مثل z المثلث ade فيه الضلع de $> az +$

ا - اى - هـ + هـ > ا + ا - وحدث ايضا مثلث د هـ فيه
 الضلع د هـ > هـ + د فلو جمعت هذه الاشياء غير المتساوية الاصغر
 للاصغر والا اكبر للاكبر تحصل - هـ + هـ + د > ا + ا -
 + هـ + د > د فاذا طرح الجزء المشترك هـ من كل من الطرفين بقي
 - هـ + هـ > ا + ا - د فاذا رضع ا د وضاعن ا د
 د حدث

- هـ + هـ > ا + ا د وهو المطلوب

(الدعوى في النظرية شكل كه)

اذا تساوى ضلعان من مثلث ضلعين آخرين من مثلث آخر وكانت الزاوية التي بين
 ضلعي المثلث الاول اكبر من الزاوية التي بين ضلعي المثلث الثاني يكون الضلع
 الثالث من المثلث الاول اكبر من الضلع الثالث من المثلث الثاني
 اى اذا كان الضلع ا - من المثلث ا - د مساويا للضلع د هـ من المثلث
 د هـ و الضلع ا د مساويا للضلع د و والزاوية - ا د اكبر من الزاوية د
 يكون الضلع - د اكبر من الضلع هـ و

(برهانه) ان يرسم زاوية مثل - ا ح = الزاوية د ويؤخذ ا ح = د و
 ويوصل - ح فيحدث مثلث ا - ح = للمثلث د هـ ولان الضلع ا د
 د و فمساو الزاوية - ا ح = الزاوية د عملا والضلع ا ح = د و
 كذلك (كافي النظرية السادسة) فينتج من تساوى المثلثين ان الضلع - ح =
 هـ و فاذا انصفت الزاوية د ا ح يستقيم ا ح لا يتع هذا المستقيم الا في الزاوية
 - ا د لانها اكبر من الزاوية - ا ح فينته اذا وصل - ح يكون المثلث
 ا ح - مساويا للمثلث ا - د لان الضلع ا ح = للضلع ا د عملا والزاوية
 ح ا - = للزاوية د ا ح كذلك والضلع ا ح مشترك (كافي النظرية السادسة)
 وينتج من تساوى هذين المثلثين ان الضلع ح - = ح -

ومن المعلوم ان المثلث ح - - فيه الضلع - ح > - ح + ح - فاذا اُبدل
 الضلع ح - بالضلع ح - كان - ح > - ح + ح - لكن - ح + ح -

= > - ف يكون - ح > - و حيث أن - ح = هو يكون هو و
> - أي > - ح هو وهو المطلوب

• (تنبيه) •

إذا تساوى ضلعان من مثلث ضلعين آخرين من مثلث آخر وكان الضلع الثالث
من المثلث الأول أكبر من الضلع الثالث من المثلث الثاني تكون الزاوية التي بين
ضلعى المثلث الأول أكبر من الزاوية التي بين ضلعى المثلث الثانى أى إذا كان
الضلع ١ - من المثلث ١ - مساوياً للضلع ٢ - من المثلث ٢ - وهو والضلع
١ - مساوياً للضلع ٢ - وكان الضلع ٣ - أكبر من الضلع ٣ - هو تكون
الزاوية ١ - أكبر من الزاوية ٢ -

(برهانه) ان يقال لو لم تكن الزاوية ١ - أكبر من الزاوية ٢ - ولكانت اما
مساوية لهما أو أصغر منهما فان كانت مساوية لهما لزم ان يكون الضلع ٣ - مساوياً
للضلع ٢ - وهذا مخالف للمفروض وان كانت أصغر منهما لزم ان يكون الضلع
٣ - أصغر من الضلع ٢ - وهو أيضاً مخالف للمفروض خبثتد تكون الزاوية
١ - أكبر من الزاوية ٢ - وهو المطلوب

• (الدعوى يا النظرية شكل ٢٣) •

إذا تساوت أضلاع مثلث أضلاع مثلث آخر كل نظيره كان المثلثان متساويين أى
إذا كان الضلع ١ - من المثلث ١ - = للضلع ٢ - من المثلث ٢ - وهو
والضلع ١ - = للضلع ٢ - والضلع ٣ - = للضلع ٣ - هو يكون المثلث
١ - مساوياً للمثلث ٢ -

(برهانه) ان يقال يلزم من تساوى الأضلاع المتناظرة ان تتساوى الزوايا المتناظرة
أى ان تكون الزاوية ١ - = للزاوية ٢ - والزاوية ٢ - = للزاوية ٣ - والزاوية
٣ - = للزاوية ١ - واذ لو لم تكن الزاوية ١ - مساوية للزاوية ٢ - ولكانت اما أكبر
منها أو أصغر منها فان كانت الزاوية ١ - أكبر من الزاوية ٢ - كان الضلع ٣ - أكبر
من الضلع ٢ - وهذا مخالف للمفروض وان كانت الزاوية ١ - أصغر من الزاوية
٢ - كان الضلع ٣ - أصغر من الضلع ٢ - وهذا أيضاً مخالف للمفروض

فتكون الزاوية α مساوية للزاوية γ وبمثل هذا يبرهن على أن الزاوية β =
 للزاوية δ وأن الزاوية γ = للزاوية δ وحيث أن أجزء المثلث α β γ
 مساوية لنظائرها من المثلث δ ϵ ζ فهو يكون المثلث α β γ مساويا للمثلث
 δ ϵ ζ وهذا هو المطلوب

* (تنبيه) *

قد ظهر من برهان هذه القضية أن الزوايا المتساوية تكون مقابلة للأضلاع
 المتساوية لأن الزاويتين المتساويتين α و γ مقابلتان للأضلعين المتساويين
 β و δ

* (الدعوى يب النظرية شكل ٢٨) *

كل مثلث متساوي الساقين زاويتاه المقابلتان لساقيه متساويتان
 أي إذا كان الساق α مساويا للساق β من المثلث α β γ تكون
 الزاوية γ مساوية للزاوية δ

(برهان) أن نصف الضلع β بنقطة مثل δ ويوصل المستقيم α δ فيكون
 المثلثان الحادان α δ و β δ γ متساويين لأن الضلع α مشترك والضلع
 α = للضلع β فرضا والضلع δ = للضلع δ عملا (كفاي)
 النظرية الحادية عشر) ويلزم من تساوي هذين المثلثين أن تكون الزاوية γ =
 للزاوية δ وهو المطلوب

* (تنبيه) *

اعلم أن أي ضلع من أضلاع المثلث غير المتساوي الساقين يصح أن يعتبر قاعدة
 ورأس الزاوية المقابلة له تسمى رأس المثلث وأما المثلث المتساوي الساقين
 فقاعدته ضاعفه الثالث أي مادون الساقين .

* (ونفج من هذه النظرية) *

أولا أن كل مثلث متساوي الأضلاع فهو متساوي الزوايا
 وثانيا أن المستقيم الواصل من رأس مثلث متساوي الساقين إلى وسط قاعدته
 يكون عمودا عليها ومنصف الزاوية الرأس لأنه يلزم من تساوي المثلثين

ا د و ا د و ان تكون الزاوية - ا د = للزاوية د ا د والزاوية ا د -
= للزاوية ا د *

• (الدعوى يد النظرية) •

اذا تساوى زاويتان من مثلث تساوى الضلعان المقابلان لهما
اى اذا كانت الزاوية ا د = ا د - يكون الضلع ا د = ا د -
(برهانه) ان يقال لو تصورنا مثلثا كالمثلث ا د - مساويا للمثلث ا د -
بحيث يكون الضلع ا د = ا د - والزاوية ا د = ا د - والزاوية ا د =
= ثم طبقنا المثلث ا د - على المثلث ا د - بحيث تقع النقطة ا د -
على النقطة ا د - والنقطة ا د - على النقطة ا د - لكات الزاوية ا د = ا د -
= وحيث تدقع الضلع ا د - على الضلع ا د - والضلع ا د - على ا د -
وتقع النقطة ا د - على النقطة ا د - فيكون ا د = ا د - ويلزم من هذا
ان يكون ا د = ا د - وهو المطلوب

• (الدعوى يد النظرية شكل ٣٠) •

اى مثلث احده زاويته ا كبر من الاخرى يكون ضلعه المقابل للكبرى ا كبر
من ضلعه المقابل للصغرى وبالعكس اى اى مثلث ا د ضلعيه ا كبر من الاخر
تكون زاويته المقابلة للضلع الاكبر ا كبر من زاويته المقابلة للضلع الاصغر
(برهان القضية الاولى) ان يقال اشكن الزاوية ا د < ا د - فيكون الضلع ا د -
المقابل للزاوية ا د اكبر من الضلع ا د المقابل للزاوية ا د -
ولبيانته تصورنا زاوية مثل ا د - مساوية للزاوية ا د - فيكون المثلث الحادث
ا د - متساوى الاقن اى يكون ا د = ا د - وحيث ان الخط
المستقيم ا د اقسر من ا د + ا د و ا د + ا د = ا د + ا د = ا د -
ا د يكون ا د اكبر من ا د

(وبرهان القضية الثانية) ان يقال ليكن الضلع ا د < ا د - فتكون الزاوية
ا د المقابلة للضلع ا د اكبر من الزاوية ا د المقابلة للضلع ا د
اذ لو لم تكن الزاوية ا د اكبر من الزاوية ا د لكات اما اصغر منها او مساوية

لها فان كانت أصغر منها الزم ان يكون $a > 1$ وهذا يخالف المفروض
وان كانت مساوية لها الزم ان يكون $a = 1$ وهذا أيضا يخالف المفروض
فان يلزم ان تكون الزاوية \angle أكبر من الزاوية \angle وهو المطلوب
* (الدعوى به النظرية شكل ٢١) *

النقطة الخارجة عن مستقيم لا يمكن ان ينزل منها على الاعدود واحد
(وبرهانها) ان نفرض نقطة مثل \angle خارجة عن المستقيم a وان \angle
عمود عليه ثم يقال ان أى مستقيم مدمن النقطة \angle الى أى نقطة من نقط
المستقيم a غير النقطة \angle لا يكون عمودا عليه فان قبل يمكن تنزيل عمود آخر
مثل \angle ومثلا قلنا اذا مده \angle على استقامته جهة \angle ثم أخذ \angle =
 \angle ثم وصل المستقيم \angle وحدث مثلث \angle = للمثلث \angle لان
الضلع \angle مشترك والضلع \angle = للضلع \angle بالعمل والزاوية \angle و
= للزاوية \angle و \angle اقسامها و يلزم من تساوى هذين المثلثين ان تكون الزاوية
 \angle و \angle مساوية للزاوية \angle و \angle وحيث ادعى ان \angle عمود على a تكون
الزاوية \angle و \angle قائمة فتكون الزاوية \angle و \angle كذلك و يلزم من هذان ان يكون
مجموع المتجاورتين \angle و \angle و \angle و \angle مساويا للقائمتين وعليه يكون الخط \angle و \angle
مستقيما واحدا اما بالانقطعتين \angle و \angle المار بهما المستقيم \angle و \angle و يلزم
من هذا ان كان وصل مستقيمين بين نقطتين وهو محال فتبين بهذا ان مجموع
المتجاورتين \angle و \angle و \angle و \angle لا يكون مساويا للقائمتين فحينئذ لا تكون الزاوية
 \angle و \angle قائمة بمعنى ان المستقيم \angle و \angle ليس عمودا على المستقيم a وهو المطلوب
* (الدعوى به النظرية شكل ٢١) *

اذا أخذت نقطة خارج مستقيم وأنزل منها عمودا ورائه فاعلم
أولا ان العمود أقصر من كل ماثل

ثانيا ان المائل ذي البعدين المتساويين عن موقع العمود متساويان
وثالثا ان بعدي المائلين المتساويين عن موقع العمود متساويان
ورابعا ان المائل ذي البعدين غير المتساويين أبعدهما عن موقع العمود

أطولهما

وخامسان المائلين غير المتساويين أطولهما أبعدهما عن موقع العمود
 أى إذا اخذت نقطة مثل a خارج خط مثل de وأنزل منها عمود a -
 وموائ ah و ad و ae الخ فاعلم
 أولاً أن العمود ah يكون أصغر من كل مائل
 وثانياً أن الخطين ad و ae المائلين المتباعدين عن موقع العمود يكونان
 متساويين إذا كان البعدان de و ae متساويين
 وثالثاً أن المائلين ad و ae إذا كانا متساويين فالبعدان de و ae
 يكونان كذلك

ورابعاً أن البعد de إذا كان أكبر من البعد ae كان المائل ad أطول
 من المائل ae
 وخامساً أن المائل ad إذا كان أطول من المائل ae كان البعد de أكبر
 من البعد ae

(برهان القضية الأولى) ان يعد العمود ah على استقامته جهة e ثم يؤخذ
 البعد de و ae ويوصل de فيحدث مثلث ade = للمثلث
 ae لأن الزاوية de = ae لقيامهما والضلع ae مشترك
 والضلع de = للضلع ae بالعمل ويلزم من تساوى هذين المثلثين ان
 يكون الضلع de = ae لكن في المثلث ade والضلع ae > de أى
 ان de > ae فاذن يكون de > ae وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) ان يقال حيث ان البعد de = ae بالقرض
 والضلع ae مشترك والزاوية de = ae لازاوية ae لقيامهما يكون
 المثلث ade = للمثلث ae ويلزم من تساوى هذين المثلثين ان يكون
 de = ae وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثالثة) أن يقال حيث ان المائل ad = للمائل ae
 يكون المثلث ade متساوى الساقين فيثبت ان يكون العمود ah النازل من

رأسه على قاعدته ما رابطها أي يكون $د = ر$ وهو المطلوب
 (وبرهان القضية الرابعة) ان يقال حيث ان البعد $د < ر$ يكون
 المائل $ا < ا هـ$ لانه اذا أخذ $د = ر$ وصل $ا ج$ و $د$ يحدث
 مثلث $د ر ج =$ للمثلث $ر ج ا$ لان الزاوية $د ر ج =$ للزاوية $ج ر ا$
 لقيامهما والضلع $ج ر$ مشترك والضلع $ر د =$ للضلع $ر ا$ بالعمل ويلزم
 من تساوي هذين المثلثين ان يكون $د ج = ج ا$ وأيضا اذا وصل $د هـ$ يحدث
 مثلث $د ر هـ =$ للمثلث $د ر ا$ لان الزاوية $د ر هـ =$ للزاوية $د ر ا$
 لقيامهما والضلع $د ر$ مشترك والضلع $ر هـ =$ للضلع $ر ا$ بالعمل ويلزم
 من تساوي هذين المثلثين ان يكون $د هـ = ا هـ$ لكن $ا هـ < ا ج$ و $د ج < ا ج$ أي
 $ا هـ < ا ج$ أو $ا هـ < ا د$ و $ا د = ا هـ$ فيكون $ا د < ا هـ$ وهو المطلوب
 (وبرهان القضية الخامسة) ان يقال حيث ان المائل $ا د$ أطول من المائل
 $ا هـ$ يكون البعد $د$ أكبر من البعد $ر$ لانه لو لم يكن البعد $د$ أكبر
 من البعد $ر$ لكان مساويا له أو أصغر منه فان كان مساويا له يلزم ان يكون
 المائل $ا د$ مساويا للمائل $ا هـ$ وهذا يخالف للمفروض وان كان أصغر منه
 يلزم ان يكون المائل $ا د$ أصغر من المائل $ا هـ$ وهو أيضا يخالف للمفروض
 فاذن يكون البعد $د$ أكبر من البعد $ر$ وهو المطلوب

وينتج من هذه النظرية

أولان البعد الحقيقي بين نقطة ومستقيم هو العمود النازل منها عليه لانه تبين ان
 العمود اصغر من كل مائل مارتبها بأي نقطة من نقطة
 وثانيا انه لا يمكن ان يوصل من نقطة الى مستقيم ثلاثة خطوط مستقيمة متساوية
 لانه تبين ان المائل الابعد عن العمود هو الاطول من المائل الاقرب للعمود
 المذكور

(الدعوى السابعة عشرة النظرية)

اذا اقيم عمود على وسط مستقيم محدود فاعلم أولان البعدين الموصولين من أي
 نقطة من نقاط العمود الى نهايتي المستقيم المذكور يكونان متساويين وثانيا ان

البعدين الموصولين من أى نقطة خارج العمود الى نهايتى المستقيم المذكور
لا يكونان متساويين أى اذا أقيم عمود $هـ$ على وسط مستقيم $ا ب$ محدود
ينقطتين $ا و$ فان البعدين $ا هـ$ و $ب هـ$ يكونان متساويين
والبعدين $ا ز$ و $ب ز$ لا يكونان متساويين

(برهان القضية الاولى) ان يقال حيث ان البعد $ا هـ = ب هـ$ بالفرض يكون
المائل $ا هـ = ب هـ$ والمائل $ا و = ب و$ والمائل $ا هـ = ب هـ$ قتين $ب هـ$ هذا
ان البعدين الموصولين من أى نقطة من نقاط العمود $هـ$ الى النهايتى المستقيم
 $ا ب$ يكونان متساويين

(وبرهان القضية الثانية) ان نفرض نقطة مثل $ز$ خارج العمود $هـ$ و $ب هـ$
يوصل $ز ا$ و $ز ب$ ثم يوصل $ز هـ$ فيكون $ا هـ = ب هـ$ كما سبق وحيث ان
في المثلث $ز هـ ا$ الضلع $ز هـ > ز ا + ا هـ$ يكون $ز ا$ يكون $ز ب$
 $> ز ا + ا هـ$ و $ز ب = ز ا + ا هـ$ فيكون $ز ب > ز ا$ أى ان البعدين
الموصولين من أى نقطة خارج العمود $هـ$ الى النهايتى المستقيم $ا ب$
لا يكونان متساويين

• (الدعوى الثامنة عشرة النظرية) •

يتساوى المثلثان القائم الزاوية اذا تساوى منهما الوتر والاضلع
لكن الوتر $ا ب = ب و$ والاضلع $ا هـ = ب هـ$ فاقول ان المثلث القائم الزاوية
 $ا هـ ب$ يكون مساويا للمثلث القائم الزاوية $ب هـ و$ وتوضيح مساواة المثلثين اذا
كان الضلع الثالث $ب هـ$ مساويا للضلع الثالث $هـ و$ فاذا فرض ان هذين
الضلعين ليسا متساويين وان $ب هـ$ أكبر من $هـ و$ فيؤخذ $ز هـ = ب هـ$ و
يوصل $ا ز$ فيحدث مثلث $ا ز هـ$ يساوى للمثلث $هـ و$ لان الزاوية
القائمة $ز$ تساوى للزاوية القائمة $هـ$ والاضلع $ا ز = هـ و$ والاضلع $ز هـ$
 $= ب هـ$ فحينئذ هذان المثلثان متساويان ويلزم من تساويهما ان يكون $ا ز$
 $= ب و$ والفروض ان $ب و = ا ب$ فحينئذ $ا ب = ا ز$ لكن المائل $ا ب$
لا يمكن ان يساوى $ا ز$ لانه متباعد عن العمود $ا هـ$ أكبر من $ا ز$ فحينئذ

لا يمكن ان يكون α أكبر من β ومثل هذا يبرهن على انه لا يمكن ان يكون α أصغر من β فاذا المثلث $\alpha = \beta$ للمثلث وهو المطلوب

(الدعوى التاسعة عشرة النظرية)

يتساوى المثلثان القائم الزاوية اذا تساوى منهما الوتر وزاوية غير القائمة
ليكن $\alpha = \beta$ و $\gamma = \delta$ فيوضع المثلث β على α بان
يوضع β على α فمن حيث ان الزاوية δ مساوية للزاوية γ فضع δ
ياخذ اتجاه α وأيضا β ياخذ اتجاه α والا لا يمكن من نقطة γ
تنزيل عمودين على α فحينئذ النقطة δ تقع على النقطة γ ويتطبق
المثلثان على بعضهما انطباقا كلياً وهو المطلوب

(الدعوى العشرون النظرية)

اذا انصفت زاوية بمستقيم فاعلم أولان العمودين النازلين على ضلعيها من أي
نقطة من نقطه متساويان

وثانياً ان العمودين النازلين على ضلعيها من أي نقطة خارجة عنه ليسا متساويين
أي اذا انصفت زاوية مثل α بمستقيم α فاعلم أولان العمودين
سواء α النازلين على ضلعيها α و α من أي نقطة من نقط انط α
كالنقطة و يكونان متساويين

وثانياً ان العمودين α و β النازلين على ضلعيها α و β من نقطة
مثل α خارجة عن المستقيم α لا يكونان متساويين

(برهان القضية الاولى) ان يقال حيث ان الزاوية $\alpha = \beta$ للزاوية α
فرضا الوتر α مشترك بين المثلث α والقائم الزاوية في α والمثلث
 α القائم الزاوية في β يكون المثلثان متساويين ويلزم من تساويهما ان
يكون البعد $\alpha = \beta$ للبعد α وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) ان ينزل من النقطة α عمود α على الضلع α
ثم يوصل مستقيم α فيكون العمود α أصغر من المائل α وحيث
ثبت في المثلث α ان الضلع $\alpha > \beta + \gamma$ وان $\alpha = \beta + \gamma$

يكون هل \angle هـ ح + ح د لكن هـ ح + ح د = هـ د فيكون هل \angle هـ د
وحيث ان طه \angle هل يكون طه \angle هـ د وهو المطلوب .

(تبييه)

المستقيم المنصف الزاوية هو المحل الهندسي لكل نقطة بعدد ما عن ضلعي الزاوية
متساويان

(مبحث الخطوط المتوازية وتأثيرها)

(الدعوى الحادية والعشرون النظرية)

المستقيمان ا ح و ب د العمودان على مستقيم ثالث ح د يكونان متوازيين
لانهما ان تلاقيان نقطة مثل م لا يمكن من هذه النقطة تنزيل عمودين على
ح د وهو محال

(الدعوى الثانية والعشرون النظرية)

من نقطة يمكن ان يمد مستقيمان موازيين لمستقيم معلوم

فن نقطة ا ينزل ا ب عمودا على ح د المعلوم ومن النقطة المذكورة ا
يقام ا د عمودا على ا ب فيكون ا د موازيا ب د لان المستقيمين ا ب و
ب د عمودان على ا ب

ومن البديهي انه لا يمكن ان يمد المستقيم واحد من نقطة معلومة بحيث يكون
موازيا للمستقيم مفروض

(الدعوى الثالثة والعشرون النظرية)

اذا كان مستقيمان ح د و ا ب متوازيين فكل مستقيم ح ر عمود
على احدهما ا ب يكون عمودا على الاخر ح د

ومن الواضح ان خط ح ر لابد ان يقطع خط ح د والا لم يكن من نقطة ح ر
مد مستقيمين موازيين لخط ح د وليبان ان خط ح د عمود على ح ر يقال

اذا كان الخط ح د مائلا على ح ر يمكن ان يقام من نقطة ح د عمود على
ح ر فيكون هـ د العمود موازيا لخط ا ب وحيث يمكن وجود مستقيمين

مازيين بالنقطة ح د وكلاهما موازيا لخط ا ب وهو محال

• (الدعوى الرابعة والعشرون النظرية) •

المستقيمان $ا-ب$ و $ج-د$ الموازيان للثالث هو يكونان متوازيين
لانه اذا تلاقى المستقيم $ا-ب$ مع المستقيم $ج-د$ في نقطة مثل $م$ لامن أن يحد
من هذه النقطة مستقيمان موازيان لخط $هو$ وهو محال

• (تعاريف) •

اذا قطع مستقيم مثل $هو$ مستقيمين مثل $ا-ب$ و $ج-د$ فحدث ثمان زوايا في
نقطتي التقاطع $س-و-ح$ فالاربعة زوايا (١) و (٤) و (٥) و (٨) الداخلة
في المسافة المكاتبة بين المستقيمين $ا-ب$ و $ج-د$ تسمى زوايا داخلة والاربعة زوايا
الآخر تسمى زوايا خارجية

وكل زاويتين مثل زاويتي (١) و (٥) موضوعة احدهما في جهة بالنسبة
للقاطع مخالفة لجهة وضع الاخرى ويكونان داخليين وغير متجاورين فانهما
يسميان زاويتين متبادلتين داخليتين

وكل زاويتين مثل زاويتي (٨) و (٢) موضوعتين في جهة واحدة من القاطع
واحداهما داخلة والاخرى خارجية وغير متجاورتين فانهما يسميان زاويتين
متناظرتين وكل زاويتين مثل زاويتي (٢) و (٦) موضوعتين بجانب القاطع
وخارجيتين وغير متجاورتين فانهما يسميان زاويتين متبادلتين خارجيتين

• (الدعوى الخامسة والعشرون النظرية) •

اذا قطع المستقيم مستقيمين متوازيين فاولا الزاويتان المتبادلتان الداخلتان
تكونان متساويتين

وثانيا الزاويتان المتبادلتان الخارجتان تكونان متساويتين

وثالثا الزاويتان المتناظرتان تكونان متساويتين

ورابعا الزاويتان الداخلتان الموضوعتان في جهة واحدة من القاطع مجموعهما
يساوي قائمتين

برهان القضية الاولى أن يقال ليكن خط $ا-ب$ موازيا لخط $ج-د$ وخط $س-و-ح$
قاطعهما في نقطة $ط$ وسط هو ينزل طم عمودا على $ا-ب$ فهذا الخط

يكون أيضا عمودا على $د$ ويكون المثلثان القائم الزاوية $م ط ه$ و $ط ه و$ متساويين لان الوترين $م ط ه$ و $ط ه و$ متساويان بالعمل والزاويتان $م ط ه$ و $ط ه و$ متساويتان لانهما متقابلتان بالرأس وينتج من تساوي هذين المثلثين أن الزاويتين المتبادلتين الداخليتين $م ه ط$ و $ط و ه$ متساويتان ولايات أن زاوية $ه و د$ تساوي زاوية $ه و د$ يقال من المعلوم ان مجموع زاويتي $ا ه و$ و $ه و د$ يساوي قائمتين وأيضا مجموع زاويتي $د و ه$ و $ه و د$ يساوي قائمتين فيكون $ا ه و + ه و د = د و ه + ه و د$ لكن زاوية $ا ه و = د و ه$ فتكون زاوية $ه و د = د و ه$

وثانيا الزاويتان المتبادلتان الخارجتان $ن ه ر$ و $د و ح$ متساويتان لانهما مقابلتان بالرأس للزاويتين المتبادلتين الداخليتين $م ه ط$ و $ط و ه$ ثالثا الزاويتان المتناظرتان $ن ه ر$ و $ه و د$ متساويتان لان $ن ه ر = ا ه و + ه و د = د و ه + ه و د = د و ه$ فالتين $ا ه و = ه و د$

• (الدعوى السادسة والعشرون النظرية) •

وبالعكس اذا حدث من مستقيمين مع مستقيم قاطع زوايا متبادلة داخلية متساوية أو زوايا متبادلة خارجة متساوية أو زوايا متناظرة متساوية أو زوايا داخلية في جهة واحدة من القاطع ومجموعها يساوي قائمتين فهذان المستقيمان يكونان متوازيين

أولا ليكن المستقيمان $ا ر$ و $د$ مقطوعين بالقاطع $ن ح$ فاذا كانت الزاويتان المتبادلتان الداخليتان $ا ه و$ و $ه و د$ متساويتين يكون خط $ا ر$ موازيا لخط $د$

لانه لو لم يكن خط $ا ر$ موازيا لخط $د$ فيمكن أن يعمد من النقطة $ه$ مستقيم $ه$ يوازي خط $د$ ويلزم من هذا أن تكون الزاويتان $ه و د$ و $د و ه$ متساويتين لكونهما متبادلتين داخليتين والمفروض أن زاوية $ا ه و = ه و د$

فتكون زاوية $أهـو = هـو$ وهذا محال
وثانيا إذا كانت الزاويتان المتبادلتان الخارجتان $زهر$ و $ووح$ متساويتين
تكون الزاويتان $أهـو$ و $هو$ متساويتين أيضا وبمعنى ما تقرير يكون
خط $ا - موازيا لخط هـ$

وثالثا إذا كانت الزاويتان المتناظرتان $زهر$ و $هو$ متساويتين يكون
خط $ا - موازيا لخط هـ$ لأن زاوية $زهر$ تساوي زاوية $أهـو$ فتكون
زاوية $أهـو = هو$ ويلزم من هذا أن يكون خط $ا - موازيا لخط هـ$
ورابعا إذا كان مجموع زاويتي $زهر$ و $هو$ مساويا لقائمتين يكون خط
 $ا - موازيا لخط هـ$ لأنه من كون $زهر + أهـو = قائمتين$ ينتج من ذلك
أن زاوية $أهـو = هو$ ويلزم من هذا أن يكون خط $ا - موازيا لخط هـ$
(الدعوى السابعة والعشرون النظرية)

الزاويتان اللتان اضلاعهما المتناظرة متوازية، تساويتان أو مجموعهما يساوي
قائمتين

أولا لتكن $ا - هـ$ و $هو$ زاويتين اضلاعهما متوازية وموجهة الى جهة
واحدة فهاتان الزاويتان $ا - هـ$ و $هو$ متساويتين وذلك لأن الزاوية $ا - هـ$
تساوي الزاوية المتناظرة لها $هو$ وأيضا الزاوية $ا - هـ$ تساوي الزاوية
المتناظرة لها $ا - هـ$ فتكون زاوية $ا - هـ = هو$

وثانيا لتكن $ا - هـ$ و $م هـ$ زاويتين اضلاعهما متوازية وموجهة في اتجاه
مضاد فهاتان الزاويتان تكونان أيضا متساويتين لأن زاوية $م هـ = هو$
و زاوية $ا - هـ = هو$

وثالثا الزاويتان $ا - هـ$ و $م هـ$ اللتان اضلاعهما المتناظرة متوازية لكن
ضلعان منها وهما $ا - هـ$ و $م هـ$ متجهان الى جهة واحدة والضلعان الآخران
 $ا - هـ$ و $م هـ$ كل منهما متجه بعكس اتجاه الآخر مجموعهما يساوي قائمتين لأن
مجموع زاويتي $ا - هـ$ و $م هـ$ يساوي قائمتين وزاوية $ا - هـ$ تساوي
زاوية $ا - هـ$

• (الدعوى الثامنة والعشرون النظرية) •

الزاويتان اللتان اضلاعهما المتناظرة متعامدة تساويتان أو متكاملتان أى
أن مجموعهما يساوى قائمتين

لتكن \angle ا و \angle ب زاويتين اضلاعهما المتناظرة متعامدة فممن النقطة ا
خط ا ب عمودا على ا ب وعند أيضا خط ا ج عمودا على خط ا ب
فالمستقيمان ا ب و ا ج يكونان موازيين بالتناظر للمستقيمين ب د و ج د
ومتجهين في جهة واحدة فحينئذ زاوية ا ب ج تساوى زاوية ب د ج وحيث
ان مجموع زاويتي ا ب ج و ج ا ب يساوى زاوية قائمة وكذا مجموع زاويتي
ا ج ب و ج ا ب يساوى زاوية قائمة فحينئذ \angle ا ب ج \angle ج ا ب مساوية
لزاوية ا ج ب

فتبينه اذا اعتبرت الزاوية الحادة بين المستقيم ب د و امتداد المستقيم ب د
بشاهد ان مجموع زاويتي ب د ج و ج ا ب يساوى زاويتين قائمتين

• (الدعوى التاسعة والعشرون النظرية) •

مجموع زوايا المثلث يساوى زاويتين قائمتين

هذه ا ه بوازي ب د وعند ا ج جهة ا ب فحينئذ زاوية ه ا ب تساوى
زاوية ا ب د لكونهما زاويتين متناظرتين بالنسبة للموازيين ب د و ا ه
المقطوعين بالقاطع ا ب وأيضا زاوية ج ا ب تساوى زاوية ج ا د
لكونهما زاويتين متبادلتين داخليتين بالنسبة للموازيين ب د و ا ه
المقطوعين بالقاطع ا ب فحينئذ مجموع زوايا المثلث يساوى لمجموع الثلاث زوايا
التي هي ج ا ب و ا ه ب و ه ا ب وهذا المنشأ حول نقطة ا في جهة واحدة
من المستقيم ا ب وحيث ان هذا المجموع الاخير يساوى زاويتين قائمتين يلزم
ان يكون المجموع الاول مساويا لزاويتين قائمتين كذلك

نتيجة أولى لا يمكن ان يوجد في المثلث الا زاوية قائمة ومن البدهى انه لا يمكن
ان يوجد في المثلث الا زاوية منفرجة

نتيجة ثانية في كل مثلث قائم الزاوية مجموع زاويتي الحادتين يساوى زاوية قائمة

تنجيباً ثالثة اذا علت زاويتان من مثلث أو مجموعهما اتصلت الزاوية الثالثة بطرح هذا المجموع من القائمتين

تنجيباً رابعة الزاوية الخارجة - رأء الحادثة بين ضلع رأء وامتداد ضلع
 اء: تساوى لمجموع الزاويتين الداخلتين - رأء و - رأء

• (الدعوى الثلاثون النظرية) •

مجموع الزوايا الداخلة من مضلع مخدب يساوى من أمثال القائمتين بقدر ما فيه من الاضلاع الاثنتين

ففى أحد الرؤس ١ نصل الاقطار لجميع الرؤس الغير متجاورة فينقسم المضلع الى مثلثات عددها كم عدد اضلاعه الاضلعين لانه يمكن اعتبار هذه المثلثات المختلفة متحدة الرأس ١ وقواعدها اضلاع المضلع ماعدا المثلثين المتطرفين اللذين كل منهما يحتوى على ضلعين من المضلع المذكور ويشاهد أيضاً أن مجموع زوايا هذه المثلثات يساوى لمجموع زوايا المضلع فينتهذه المجموع الاخير يساوى من أمثال القائمتين بقدر ما فيه من الاضلاع الاضلعين

واذا رمز بالحرف ٥ لعدد اضلاع المضلع فمجموع زواياه يكون

$$٢ \times (٥ - ٢) = ٦ - ٤$$

• (الدعوى الحادية والثلاثون النظرية) •

الاضلاع المتقابلة والزوايا المتقابلة فى المتوازى الاضلاع متساوية

فاذا وصل القطر - رأء يحدث المثلثان - رأء و - رأء فبما الضلع - رأء مشترك وبسبب توازى اء و - رأء تكون زاوية - رأء = - رأء وبسبب توازى - رأء و - رأء تكون زاوية - رأء = - رأء فينتهذ يكون المثلثان - رأء و - رأء متساويين فينتهذ يكون الضلع - رأء المقابل للزاوية - رأء مساوياً للضلع - رأء المقابل للزاوية المساوية لها - رأء وأيضا يكون الضلع الثالث اء مساوياً للثالث - رأء فينتهذ الاضلاع المتقابلة من متوازى الاضلاع متساوية

وأيضاً من تساوى المثلثين المذكورين تكون زاوية ١ مساوية لزاوية ٢

وزاوية $ا د ه$ المركبة من زاويتي $ا د ر$ و $ر د ه$ مساوية لزاوية $ا د ه$
 المركبة من زاويتي $د ر ه$ و $ا د ر$ فثبتت الزوايا المتقابلة في المتوازي
 الاضلاع متساوية

نتيجة أولى المستقيمان المتوازيان $ا ب$ و $ج د$ المحصوران بين مستقيمين
 متوازيين آخرين $ا ه$ و $د ه$ يكونان متساويين
 نتيجة ثانية المستقيمان المتوازيان على ابعاد متساوية في جميع امتدادهما حالته
 من كون $د ه$ و $ا ب$ متوازيين فاذا أثرنا من النقطتين $ج$ و $ر$ عمودين
 $ج د$ و $ر ه$ على $ا ب$ فهذان العمودان يكونان متوازيين ومتساويين
 لانهما محصوران بين مستقيمين متوازيين

• (الدعوى الثانية والثلاثون النظرية) •

اذا كان في شكل رباعي $ا ب ج د$ كل ضلعين متقابلين متساويين أعني اذا كان
 $ا ب = ج د$ و $ا د = ر ه$ فالاضلاع المتساوية تكون متوازية والشكل
 يكون متوازي الاضلاع

لانه لو وصل القطر $د ه$ لحدث مثلثان $ا د ه$ و $ر د ه$ اضلاعهما المتناظرة
 متساوية فهما متساويان ويلزم من تساويهما أن تكون الزاوية $ا د ر$
 المقابلة للضلع $ا ب$ مساوية للزاوية $د ر ه$ المقابلة للضلع $ج د$ وعليه يكون
 الضلع $ا د$ موازيا للضلع $ر ه$ وبمثل هذا يبرهن على أن ضلع $ا ب$ يوازي
 $ج د$ فثبتت ان الشكل الرباعي $ا ب ج د$ هو متوازي الاضلاع

• (الدعوى الثالثة والثلاثون النظرية) •

اذا كان الضلعان المتقابلان $ا ب$ و $ج د$ من شكل رباعي متساويين
 ومتوازيين فالضلعان الآخران يكونان كذلك متساويين ومتوازيين والشكل
 $ا ب ج د$ يكون متوازي الاضلاع

فاذا وصل القطر $د ه$ يحدث المثلثان $ا د ه$ و $ر د ه$ متساويان لان خط
 $ا ب$ يوازي $ج د$ فتكون الزاويتان المتبادلتان الداخلتان $ا د ر$ و $د ر ه$
 متساويتين والضلع $ا د = ر ه$ بالفرض والضلع $د ه$ مشترك فثبتت

المثلثان المذكوران يكونان متساويين ويلزم من تساويهما أن يكون
 $\angle \text{ا} = \angle \text{د}$ وان تكون الزاوية $\angle \text{ا} = \angle \text{د}$ وعليه يكون خط ا د
 موازيا لخط د ه فيثبت الشكل ا د ه هو متوازي الاضلاع
 * (الدعوى الرابعة والثلاثون النظرية) *

قطر المتوازي الاضلاع ا د ه ينصفان بعضهما
 لانه بمقارنة المثلث ا د ه بالمثلث د ه ر يشاهد ان الضلع $\text{ا د} = \text{د ر}$
 والزاوية $\angle \text{ا د ه} = \angle \text{د ه ر}$ والزاوية $\angle \text{ا ه د} = \angle \text{ه د ر}$ فيثبت المثلثان
 المذكوران يكونان متساويين ويلزم من هذا أن يكون الضلع ا ه المقابل
 للزاوية $\angle \text{ا د ه}$ مساويا للضلع ه د المقابل للزاوية $\angle \text{د ه ر}$ ويكون أيضا
 $\text{د ه} = \text{ه ر}$

تبينه قطرا المعين ينصفان بعضهما عمادا لانه في الحالة التي يكون فيها الشكل
 المتوازي الاضلاع شكلا معيننا يكون الضلعان ا ر و د ر متساويين
 ويكون المثلثان ا د ه و د ه ر متساويين بسبب تساوي اضلاعهما
 المتساخرة ويفتح من تساويهما أن الزاوية $\angle \text{ا ه ر} = \angle \text{ه د ر}$ فيثبت قطرا
 المعين ينصفان بعضهما عمادا

تمت المقالة الاولى

(المقالة الثانية)
(في بيان الدوائر ومقادير الزوايا)
(الحدود)

١ (شكل ٤٦) محيط الدائرة هو الخط المتحنى الذى تكون الابعاد بين أى نقطة من نقطه والنقطة الداخلة متساوية وتلك النقطة الداخلة تسمى مركزا والدائرة هى السطح المحاط بذلك الخط المتحنى اعلم ان بعضهم عرف الدائرة والمحيط بتعريف واحد من غير تمييز وخصوص تعريف كل واحد منهما يتميز على ما ذكر بادن تأمل لان الدائرة هى سطح مستو له طول وعرض وأما المحيط فهو الخط الذى ليس له الا طول فقط

٢ جميع الخطوط المستقيمة الواصلة من المركز الى المحيط مثل $ا ب$ و $ج د$ الخ تسمى انصاف أقطار وكل خط يمر بالمركز وينتهى بالمحيط مثل خط $ا ب$ يسمى قطرا

فعلى ما ذكر في تعريف الدائرة جميع انصاف الاقطار متساوية وحيث ان الاقطار هى أضعاف انصاف الاقطار فهى أيضا متساوية

٣ جزء محيط الدائرة مثل $و ج$ يسمى قوسا والخط المستقيم الواصل بين $و$ $ج$ باقى القوس يسمى وتره

٤ قطعة الدائرة هى جزء من الدائرة يحاط بقوس ووتره

اعلم ان وتر $و ج$ دائما يكون محتصا بالقوس الاصغر وان كان موافقا للقوس الاكبر والقطعة الكبرى ان لم يكن مخصصا لهما

٥ قطاع الدائرة هو قسم من الدائرة يحاط بقوس $د ه$ وبضئى قطر $د ه$ والواصلين الى نهايتى ذلك القوس

٦ (شكل ٤٧) الخط المرسوم داخل الدائرة هو خط مستقيم مرسوم داخل الدائرة مرقما منتهيان بالمحيط كخط $ا ب$

الزاوية المرسومة داخل الدائرة هي زاوية رأسها بالمحيط وطرفاها بمحاطان
بوترين مثل زاوية - ا -

المثلث المرسوم داخل الدائرة هو مثلث رؤسه بالمحيط كمثلث - ا -
وعلى العموم الشكل المرسوم داخل الدائرة هو الشكل الذي تكون جميع زواياه
بالمحيط وحينئذ هذه الدائرة تسمى الدائرة المارة بزوايا ذلك الشكل المرسوم
٧ (شكل ٤٨) الخط الذي يقطع محيط الدائرة في موضعين يسمى خطا قاطعا
كخط - ا -

٨ الخط الذي لا يشترك مع محيط الدائرة الا في نقطة واحدة نقط يسمى خطا
مماسا ونقطة م المشتركة بين ذلك الخط والمحيط تسمى نقطة التماس
٩ وبهذا علم انه متى كان لمحيطي الدائرتين نقطة مشتركة فقط يكون هذان
المحيطان متماثلين

١٠ (شكل ١٦٠) اذا كانت اضلاع الشكل المستقيم الاضلاع متماثلة بمحيط
الدائرة فيقال لذلك الشكل شكل مرسوم على الدائرة وتسمى تلك الدائرة دائرة
مرسومة داخل الشكل المستقيم الاضلاع المذكور
• (الدعوى الاولى النظرية) •

(شكل ٤٩) كل قطر مثل - ا - يقسم الدائرة والمحيط قسمين متساويين
لان لو جعل قطر - ا - قاعدة مثلث - ا ه - وانطبق شكل - ا ه - على شكل
ا و - لكان منصف ا ه - واقعا على منصف ا و - ومنطبقا عليه
كالم الانطباق والالكان في احد هذين المنصفين نقطة واقعة على ابعاد غير
متساوية عن المركز وهذا خلف لما صرف تعريف الدائرة فعلى هذا يلزم ان المنصفين
الذين كورين والشكلين المذكورين منطبقان ومتساويان ومن ثم ثبت المطلوب
بان ذلك القطر يقسم الدائرة والمحيط قسمين متساويين
• (الدعوى الثانية النظرية) •

كل وتر مرسوم داخل الدائرة هو أصغر من القطر (شكل ٤٩)
لان متى وصل نصف قطر - ا - و - د الى نهايتي وتر - ا د - فحدث مثلث

ا ح د فيه ا د > ا ح + ح د ومن يكون ا ح + ح د =
 قطر ا ب يلزم أن يكون ا د > ا ب وبهذا ثبت المطلوب بأن الوتر يكون
 أصغر من القطر
 نتيجة أ كبر ما يمكن رسمه من الخط القاطع داخل الدائرة يكون مساويا للقطر
 * (الدعوى الثالثة النظرية) *

الخط المستقيم لا يقطع محيط الدائرة الا في نقطتين فقط فان قيسل يقطعها في ثلاث
 نقاط يجب بانه لو قطع محيط الدائرة في ثلاث نقاط لزم أن تكون الابعاد بين المركز
 وبين تلك النقاط متساوية وهذا يقتضى انه يمكن تساوى ثلاثة خطوط مخرجة
 من نقطة الى خط مستقيم وهذا خلف النظر (مقالة ١ دعوى ١٦) ومن ثمة ثبت
 المطلوب بأن الخط المستقيم القاطع لا يقطع محيط الدائرة الا في نقطتين فقط
 * (الدعوى الرابعة النظرية) *

في الدائرة الواحدة والدوائر المتساوية الاقواس المتساوية تكون موترة للدوائر
 المتساوية وبالعكس الاوتار المتساوية تكون موترة للاقواس المتساوية
 مثلا (شكل ٥٠) اذا كان يلزم في الدوائر المتساوية نصف قطر ا ح يكون
 مساويا لنصف قطر ه د فان كان قوس ا ط د مساويا لقوس ه و ح
 يكون وتر ا د مساويا لوتر ه ح لانه يلزم من كون قطر ا ب مساويا
 لقطر ه د ومنصفا للدائرة يمكن ان ينطبق نصف دائرة ا ط د على
 نصف دائرة ه و ح والمساوية انطباقا كاملا بان يكون قطر ا ب واقعا
 على قطر ه د وبهذا يقصد منقضى ا ط د مع منقضى ه و ح ويكون
 منطبقا عليه ولولم ينطبق عليه لكان في هذين المنحنيين نقط واقعة على ابعاد غير
 متساوية من المركز وهذا بخلاف تعريف الدائرة فعلى هذا ينطبق هذان المنحنيان
 ولكون قوس ا ط د مساويا لقوس ه و ح بالقرص تقع نقطة د على
 نقطة ح وتتطابق نهايات وترى ا د و ه ح ومن ثمة ثبت المطلوب بان
 الوترين متساويان
 وبالعكس حيث ان انصاف أقطار الدوائر المتساوية يكون نصف قطر

ا ح مساويا لنصف قطر ه د أقول متى كان وتر ا د مساويا وتر ه ح
 يكون قوس ا ط د مساويا لقوس ه ح فاذا رسم نصف قطر د ح
 و ع د يكون في مثلثي ا ح د و ه د ح الحادئين ا ح = ه د
 و د ح = ع د وبالقصر ا د = ه ح فمن تساوي الاضلاع
 الثلاث من هذين المثلثين يكونان متساويين انظر (مقالة ١) وتكون زاوية ا ح د
 مساوية لزاوية ه د ح فاذا انطبق نصف دائرة ا د ح على نصف دائرة
 ه د ح المساوية كما تقدم يتعدا المحيطان ويلزم من كون زاوية ا ح د
 مساوية لزاوية ه د ح ان يقع نصف قطر د ح على نصف قطر ح د
 ونقطة د على نقطة ح فلذا ظهر وثبت المطلوب من أن يكون قوس ا ط د
 مساويا لقوس ه ح

(الدعوى الخامسة النظرية)

في الدائرة الواحدة أو الدوائر المتساوية الوتر الموتر للقوس الاكبر هو اكبر
 وبالعكس الوتر الاكبر يكون موتر للقوس الاكبر
 أولا لانه متى كان قوس ا ك ا أكبر من قوس ا د يكون وتر ا ك ا أكبر من
 وتر ا د وأيضا اذا وصل نصف قطر ا ح و ح ك ففي مثلث ا ح ك ضلعا
 ا ح و ح ك مساويان اضلعي ا ح و ح د في مثلث ا ح د ولما يكون
 زاوية ا ح ك أكبر من زاوية ا ح د يكون الضلع الثالث من المثلث الاول
 ا ك أكبر من الضلع الثالث من المثلث الثاني وهو ا د انظر (مقالة ١٠ دعوى ١٠)
 وبهذا ثبت المطلوب بأن الوتر الموتر للقوس الاكبر هو اكبر

ثانيا وبالعكس انه متى فرض ان وتر ا ك ا أكبر من وتر ا د يكون قوس
 ا ك ا أعظم من قوس ا د لان في مثلثي ا ح ك و ا ح د ضلعي ا ح
 و ح ك مساويان اضلعي ا ح و ح د و ا ك الذي هو الضلع الثالث
 فوض انه أكبر من ضلع ا د وبهذا تكون زاوية ا ح ك أكبر من زاوية
 ا ح د ومن ثمة ثبت المطلوب بأن قوس ا ك ا أكبر من قوس ا د
 تبين شرط في هذه الدعوى أن القوس المقروض يكون أصغر من نصف المحيط

لانه لو كان القوس أكبر من نصف المحيط لبدأ الساتر بخلاف طبيعة ما صرح به
في الدعوى يعني اذن اظهر انه كلما ~~كبر~~ القوس صغر الوتر وبالعكس كلما صغر
الوتر كبر القوس وعلى هذا حيث ان قوس $ا د هـ$ أكبر من قوس $ا د ر$ ك
يكون $ا د$ وتر القوس الأول أصغر من $ا ك$ وتر القوس الثاني

• (الدعوى السادسة النظرية) •

إذا كان نصف قطر $د د$ عمودا على وتر $ا ب$ ينصف الوتر المذكور وقوسه
المسمى $ا د ر$

لانه مق وصل نصف قطر $د د$ وهما بالنسبة الى عمود $د د$ مائلان
متساويان فيكون بعدا $ا د$ و $د ب$ متساويين (١٦) وأيضا يلزم من كون
 $ا د = د ب$ وعمود $د د$ عمودا مخربا من وسط وتر $ا ب$ فالبعدان
من أى نقطة واقعة على ذلك العمود الى نهاية خط $ا ب$ متساويان وحيث
ان نقطة $ر$ هي إحدى النقط الواقعة على ذلك العمود يكون $ا ر = د ب$
ومنى كان وتر $ا د$ مساويا لوتر $د ب$ يلزم أن يكون قوس $ا د$ مساويا
لقوس $د ب$ فعلى هذا علم ان نصف قطر $د د$ الواقع عمودا على وتر $ا ب$
يقسم وتر $ا ب$ وقوسه في نقطة $د$ الى قسمين متساويين ويثبت المطلوب

تنبيه مـ ~~ر~~ كنز $د$ ونقطة $د$ التي هي وسط وتر $ا ب$ ونقطة $د$ التي
هي وسط القوس الموتر لذلك الوتر هذه الثلاث نقاط وقعت على خط مستقيم واقع
عمودا على الوتر ومن كون انه يكفي نقطتان لتعيين خط مستقيم فالخط الذى يمر من
نقطتين من تلك النقط المذكورة لابد ان يمر من الاخرى ويكون ذلك الخط عمودا
على الوتر وكذلك العمود المخرج من وسط الوتر يمر بمركز الدائرة وبوسط القوس
الموتر لذلك الوتر لان ذلك العمود هو عين العمود النازل من المركز على وسط الوتر
فكل واحد من هذين العمودين عمود على وسط الوتر فإلزام ان يصادوا الا ان كان
يمكن اخراج عمودين من نقطة على خط مستقيم وهذا خلف

• (الدعوى السابعة النظرية) •

يمكن ان يمر من ثلاث نقاط $ا و ر$ التي ليست على خط مستقيم محيط

دائرة فقط ولا يمكن مرور محيط آخر

فيوصل خطا $ا - و$ ومتى تنصفا بعمودي $ز ه و$ فهذان العمودان يلتقيان في نقطة $ح$ ولولم يلتقيا لكانا متوازيين فان قبل انهما متوازيان يقال حيث ان خط $ا - و$ عمود على $ز ه$ يكون عمودا على خط $و د$ الموازي الاخر واذن لكنت زاوية $ط$ قائمة ولما كان نقطة $ا و و$ ليست على خط مستقيم يكون خط $ر ط$ المستقيم الخارج من نقطة $ر$ ممتزعا عن خط $ر و$ وعمودا على $ط و$ وحينئذ يصور انزال عمودي $ر و$ $ر ط$ من النقطة $ر$ الواحدة على خط $ط و$

وهذا خلف فلذا ثبت انهما لا يتوازيان ويتلاقيان في نقطة $ح$ ومن كون نقطة $ح$ هي نقطة واقعة على عود $ز ه$ الخارج من وسط خط $ا - و$ يكون البعدان من تلك النقطة الى النهايتي خط $ا - و$ نقطتي $ا و$ متساويين وايضا من كون نقطة $ح$ هي نقطة واقعة على عود $و د$ الذي أخرجه من وسط خط $ر و$ يكون البعدان من تلك النقطة الى النهايتي خط $ر و$ وهما نقطتا $ر و$ متساويين وتكون ابعاد $ح ا و ح ر و ح د$ الثلاث متساوية فال محيط المرسوم على ان تكون نقطة $ح$ مركزا وبعد $ح ر$ نصف قطر يمر بنقط $ا و ر و د$ الثلاث ويثبت المطلوب

تبيين لنا ويثبت انه قد يمكن ان يمر محيط دائرة بالثلاث نقط المفروضة التي لم تكن على خط مستقيم ولما كان لا يمر محيط آخر دون ماضر لانه لو قيل انه يمر بنقط $ا و ر و د$ المفروضة محيط دائرة آخر يقال فلا بد ان يكون مركز هذا المحيط واقعا على عود $ز ه$ لانه لو كان خارجا من ذلك العمود لكان البعدان من نقطتي $ر و$ غير متساويين والنقطة الخارجة عن العمود لا تكون مركزا وبمثل هذا ثبت ان المركز لا يكون خارجا ايضا عن عود $و د$ ويلزم بذلك المركز ان يكون واقعا على كل من عمودي $ز ه و د و$ وحيث ان الخطين المستقيمين لا يتقاطعان الا في نقطة واحدة فقط علم انه لا يكون للعمودين نقطة مشتركة الا نقطة $ح$ ومن ثمة ثبت انه لا يمر من ثلاث نقط المحيط واحد فقط

نتيجة لامتقاطع الدائرتان في نقطة أكثر من نقطتين لانه لو كان لثلاث الدائرتين
ثلاث نقاط مشتركة للزم اتحاد المركز فيهما واذن لا تصدأ

• (الدعوى الثامنة النظرية) •

الوتران المتساويان بعداهما من المركز متساويان والوتران المختلفان الاصغر ابعد
من المركز فأما وتر $a - b$ و c المتساويان فينصفان بعמודي d و
و e و اذا وصل نصف قطر a و c فيخدد مثلثان a و b و c و
فأما الزاوية وهما متساويان حيث ان فيهما وترى a و c متساويان
وضلع a و الذي هو نصف وتر $a - b$ مساو لضلع c و الذي هو نصف
وتر c و متقاسوا في المثلثين القائم الزاوية الوتر والضلع يتساوى المثلثان
ويكون ضلع d و e مساويا لضلع d و ومن ثمة يثبت ان وترى $a - b$
و c المتساويين يكون بعداهما من المركز متساويين وأيضا
اذا كان وتر a و c أكبر من وتر d فيكون قوس a و c أكبر من
قوس d و e فاذا قطع من قوس a و c قوس a و c متساويا
لقوس d و e و وصل وتر $a - b$ ونزل عمود d و على ذلك الوتر وعمود
 d و على وتر a و يكون عمود d و أكبر من جرنه d و ولكن d و
أكبر من عمود d و يثبت ان عمود d و هو أكبر كثيرا من عمود d و
ويلازم من كون وترى a و c و d و متساويين ان يكون d و e و
وهكذا يكون d و e و d و ومن ثمة يثبت المطلوب على ان الوتر الاصغر
يكون أبعد من المركز

• (الدعوى التاسعة النظرية) •

عمود d و الخارج من نهاية أي نصف قطر كان نحو a يكون مماسا لمحيط
الدائرة لان جميع الخطوط المائلة الواصلة من المركز الى خط $a - b$ و مثل خط
 d و هي اطول من عمودي d و e و اذا تكون نقطة d و واقعة خارج
الدائرة فعلى هذا تكون كل نقطة واقعة على خط $a - b$ و خارج الدائرة الا نقطة
 a و لم تكن نقطة مشتركة بين المحيط وخط $a - b$ و الا نقطة a فقط ومن ثمة يثبت

المطلوب على ان خط α و المذكور مماس
 تنبيه لا يمكن رسم خط مماس بالدائرة من نقطة α الواقعة على المحيط الا بخط
 α و لانه لو قيل يرسم مماس آخر يقال ان هذا المماس الذي يرسم لا يكون عمودا
 على نصف قطر α وفي هذا يكون ذلك المماس بالنسبة الى نصف قطر
 α خطا متلاوعا وعمودا النازل من مركز الدائرة على المماس الجديد اصغر
 من نصف قطر α فلذا يجب ان يكون الخط الذي قيل انه مماس داخلا
 في الدائرة وخطا قاطعا

• (الدعوى العاشرة النظرية) •

فوساط α و β ل المتحصران من المحيط بين خطي α و β ه
 المتوازيين يكونان متساويين

وهذه الدعوى تكون على ثلاثة احوال

الحال الاول وهو ان يكون الخطان المتوازيان قاطعين المحيط فينثب اذا رسم
 نصف قطر α ح عمودا على وتر α و β أحد المتوازيين يكون عمودا على
 وتر β ل الموازي الاخر فعلى هذا تكون نقطة ح وسطا لقوس
 ط ح و β و α ح ل معا ومن هذا يكون قوس ط ح = قوس
 ح و قوس β ح مساويا قوس ح ل فاذا طرحت الاشياء المتساوية من
 اشياء متساوية بقيتها تكون متساوية ومن ثمة يثبت المطلوب بان يكون ط ح
 - β ح = ح و - ح ل اعني ان قوس ط ح = β ح ل

الحال الثاني وهو ان يكون احد المتوازيين قاطعا والاخر مماسا فاذا وصل
 بين المركز وبين نقطة ح التي هي نقطة القاس بنصف قطر α ح فحي كان
 نصف قطر α ح عمودا على خط α ه المماس يكون عمودا على موازيه
 الذي هو وتر α و حيث ان نصف قطر α ح عمودا على وتر α و
 يقتضي ان تكون نقطة ح واقعة في وسط قوس ط ح و ومن اجل ذلك
 يثبت ان قوسي ط ح و β ح المتصورين بين α و β ه المتوازيين
 يكونان متساويين

الحال الثالث هو ان يكون احد المتوازيين عماسا في نقطة ϵ والاخر في نقطة ϵ فاذا رسم خط α - القاطع موازيا لهذين العماسين فعلى ما ذكر في الحال الثاني يكون قوس ϵ ط ϵ = قوس ϵ و قوس ϵ ط ϵ = قوس ϵ و بهذا يكون قوس ϵ ط ϵ الذي هو الكل = قوس ϵ و ϵ ويكون كل واحد من هذين القوسين نصف المحيط وينت المطلوب

• (الدعوى الحادية عشر النظرية) •

اذا تقاطع دائرتان في نقطتين فالتقاطع المار بين المركزين يكون عمودا على وتر α - الواسل بين نقطتي تقاطع الدائرتين ومنصفه لانه لان خط α - الواسل بين نقطتي التقاطع هو وتر مشترك والعمود الذي يخرج من وسطه ويمر من الطرفين يمر من كل من المركزين ϵ و δ ومن حيث انه لا يمكن ان يوصل بين النقطتين المفروضتين الا بخط مستقيم واحد فقط يلزم ان يكون الخط المار من المركزين عمودا على وسط الوتر المشترك وينت المطلوب

• (الدعوى الثانية عشر النظرية) •

اذا كان البعد بين مركزي الدائرتين اصغر من مجموع نصفي قطريهما وكان نصف القطر الاكبر اصغر من مجموع نصف القطر الاصغر والبعد بين المركزين تتقاطع هاتان الدائرتان

لانه لا بد لوصول تقاطع الدائرتين ان يمكن رسم مثل α ϵ δ ولم يكف الاثبات بان يكون خط ϵ δ المستقيم اصغر من مجموع α ϵ δ بل يجب ان يكون نصف القطر الاكبر الذي هو خط α ϵ المستقيم اصغر من مجموع α ϵ δ و δ فعلى هذا حق كان رسم الثالث ممكنا فالحيطان المرسومان من مركزي ϵ و δ يتقاطعان في نقطتي α و β وينت المطلوب

• (الدعوى الثالثة عشر النظرية) •

اذا كان بعد ϵ δ الذي بين المركزين مساويا لمجموع نصفي قطر ϵ δ و α δ تتماس هاتان الدائرتان في الخارج بحيث ان α و δ نصفي قطري الدائرتين مساويان لبعده ϵ δ علم انه لم تكن نقطة مشتركة الا نقطة α وباعداها لا تكون

مشتركة لانه لو وجد فقطتان مشتركان لكان يمكن رسم مثلث ويكون البعد بين المركزين اصغر من مجموع نصفي القطرين كما صرح به في الدعوى التي تقدمت وهذا خلاف ما فرض فعلى هذا يثبت المطلوب بانهم متى كان البعدين المركزين مساويين لمجموع نصفي القطرين تتماس الدائرتان في الخارج
 * (الدعوى الرابعة عشر النظرية) *

اذا كان بعد δ الذي بين مركزي الدائرتين مساويا للتفاضل بين نصفي القطرين δ و α و α و α فتتماس هاتان الدائرتان في الداخل لانه لم يكن لمحيطاتين الدائرتين نقطة مشتركة الانقطة α فقط ولم يوجد نقطة مشتركة اخرى لانه لو وجدت نقطة مشتركة اخرى لكان نصف القطر الاكبر اصغر من مجموع نصف قطر α و δ الذي هو البعد بين المركزين وفي هذه الدعوى التفاضل بين نصفي القطرين مساو للبعد الذي بين المركزين و α و نصف القطر الاكبر مساو لبعد δ و α فعلى هذا لم يكن هذين المحيطين الانقطة مشتركة فقط ومن هذا يثبت ان هاتين الدائرتين تتماسان في الداخل
 نتيجة الدائرتان المتماستان يكون مركزاهما ونقطة تماسهما على خط مستقيم سواء كان التماس في الداخل أو في الخارج

تنبيه كل الدوائر التي مراكزها على خط δ ومحيطاتها تمر من نقطة α تكون مقاسة ولم يكن لها نقطة مشتركة الانقطة α وان اخرج عمود α من نقطة α على خط δ المستقيم يكون ذلك العمود مماسا مشتركا لجميع تلك الدوائر
 * (الدعوى الخامسة عشر النظرية) *

في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية اذا كانت الزوايا المركزية متساوية فتكون أقواسها متساوية وبالعكس اذا كانت الأقواس متساوية فتكون زواياها المركزية ايضا متساوية يعني اذا كانت زاوية α المركزية مساوية لزاوية δ اخرى يكون قوس α = قوس δ وبالعكس اذا كان قوس α = قوس δ تكون زاوية α المركزية مساوية لزاوية δ أولامن كون زاوية α مساوية لزاوية δ يمكن ان يوضع احدى هاتين

الدائرتين على الاخرى بان يكون مركز δ على مركز γ ولكون انصاف الاقطار
 المحيطتين β زاويتين متساويتين تقسم نقطة α على نقطة δ ونقطة ϵ
 على نقطة η فعلى هذا يلزم ان يقع قوس $\alpha\beta$ ايضا على قوس $\delta\eta$
 ويتحددان والالكان في هذين المحيطين فقط على ابعاد غير متساوية من المركز
 وهذا خلف لتساوي الدوائر فلذا يطبق قوس $\alpha\beta$ على $\delta\eta$ ويساويه
 ويثبت المطلوب

ثانيا اذا كان قوس $\alpha\beta$ مساويا قوس $\delta\eta$ فتساوى زاوية $\alpha\delta\gamma$
 زاوية $\delta\eta\gamma$ لانه ان لم تكن هاتان الزاويتان متساويتين بان كانت $\alpha\delta\gamma$
 اكبر فغنى اخذت زاوية $\alpha\delta\gamma$ مساوية لزاوية $\delta\eta\gamma$ من هذه الزاوية الكبرى
 فعلى ما صرح به في الشق الاول من هذه الدعوى يكون قوس $\alpha\delta$ مساويا
 قوس $\delta\eta$ ولكون قوس $\alpha\beta$ مساويا لقوس $\delta\eta$ بالقرض يلزم ان يكون
 قوس $\alpha\delta$ مساويا لقوس $\alpha\beta$ واذن للزم تساوي الجزئ بالكل وهذا خلف
 فعلى هذا لا يمكن ان تكون زاوية $\alpha\delta\gamma$ اكبرا واصغرا من زاوية $\delta\eta\gamma$
 وتساوى الزاويتان ويثبت المطلوب

(الدعوى السادسة عشر النظرية)

اذا كانت النسبة بين زاويتي $\alpha\delta\gamma$ و $\delta\eta\gamma$ المركبتين كالنسبة بين عددين
 صحيحين في دائرة واحدة وفي دوائر متساوية فتكون النسبة بين قوس $\alpha\delta$
 وقوس $\delta\eta$ كالنسبة بين هذين العددين وفي هذا تحدث الاربعة المتناسبة
 وهي زاوية $\alpha\delta\gamma$: زاوية $\delta\eta\gamma$:: قوس $\alpha\delta$: قوس $\delta\eta$
 فحتى كانت النسبة بين $\alpha\delta\gamma$ و $\delta\eta\gamma$ كالنسبة بين عدد γ وعدد
 الصحيحين او اذا جعلت زاوية γ مقياسا مشتركا على ان تشغل في زاوية
 $\alpha\delta\gamma$ سبع مرات وفي زاوية $\delta\eta\gamma$ اربع مرات ولكون اقسام
 الزاوية $\alpha\delta\gamma$ $\alpha\delta\gamma$ و $\delta\eta\gamma$ و $\delta\eta\gamma$ و $\delta\eta\gamma$ و $\delta\eta\gamma$ و $\delta\eta\gamma$ و $\delta\eta\gamma$ و $\delta\eta\gamma$
 متساوية يلزم ان تكون اقسام الاقواس وهي $\alpha\delta$ و $\delta\eta$ و $\delta\eta$ و $\delta\eta$ و $\delta\eta$
 و $\delta\eta$ و $\delta\eta$ و $\delta\eta$ متساوية فعلى هذا تكون نسبة قوس $\alpha\delta$

تكون قواها متناسبة ويكون نسبة $ا د : ا ه :: ا و : أ ه$
 لكن من خواص الاربعة المتناسبة انه اذا كان الاول اعظم من الثاني لا بد
 ان يكون الثالث اعظم من الرابع وعلى هذا من كون قوس او اكبر
 من قوس $ا ه$ ان تكون زاوية $ا د$ اعظم من زاوية $ا ه$ واذا اقل من
 يكون الاصغر اعظم من الاكبر وهذا خلف فلذا علم ان نسبة $ا د$ الى
 $ا ه$ تنسبة قوس $ا د$ الى القوس التي هو اكبر من قوس $ا ه$
 وبمثل هذا ثبت ان الرابع المناسب لم يكن اصغر من قوس $ا د$ ومن ثم ثبت
 المطلوب بان نسبة زاوية $ا د$: زاوية $ا ه :: قوس ا د$: قوس $ا ه$

(تنبيه) حيث ان الزاوية المركزية يقسمها بين القوس المجاوزين طرفيها مناسبة
 وتعلق لانها لو تزيد أو تنقص على أي نسبة فلا بد ان ذلك القوس يتزايد أو يتناقص
 على مناسبتك تلك النسبة فمن أجل ذلك يرى ان وضع احد المقدارين لقياس
 الآخر حقيقى فمن ذا ان اخذ في قياس قوس $ا د$ لقياس زاوية $ا د$ الا ان
 الزوايا التي تقاس بالاقواس حين تقديرها لا بد من ان تكون الاقواس
 مرسومة بنصف قطر مساو فقامل لان هذا القرض ملحوظ في جميع الدعاوى
 التي تقدمت

(تنبيهان) الاول علم ان قياس المقدار بالمقدار الذي من جنسه أو وفق للطبع فعلى
 هذا يمكن تقدير سائر الزوايا بالزاوية القائمة متى فرض ان الزاوية القائمة أحد
 تعين الزاوية الحادة بالسرا المتعديين ١ و ٠ وتخصص المنفرجة بالعدد
 المتعديين ١ و ٢ ولكون التعيين والتقدير بهذا الطريق لم يكن سهلا
 وقد ظهر ان تقدير الزوايا بالاقواس الدوائر موافق للعمل وثابت بالتجربة وان كان
 تقدير الشيء بغير جنسه ليس بموافق الاصول فلا عسر في استنباط المقياس
 الحقيقى بين الزوايا بواسطة تلك الاقواس لانه اذا نظر الى النسبة بين القوس
 التي هو مقدار أى زاوية وبين القوس الذي هو ريع المحيط فهي كالنسبة بين تلك
 الزاوية وبين القائمة فظهر ان القوس يكون مقدارا حقيقيا للزاوية

تبيينه ٢٠ كل ملائمتين في الثلاث دعاوى التي تقدمت من تقدير الزوايا بالاقواس
فانه جار على تقدير القطاع بالقوس لانه اذا كانت الزوايا متساوية تكون الاقطوع
متساوية وعموما تكون هذه الاقطوع متناسبة بالزوايا فعلى هذا تكون النسبة بين
قطاعي $a - b$ و $a - c$ كالنسبة بين قوسي $a - b$ و $a - c$ اللذين هما
قاعدتان لهذين القطاعين سواء كانا في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية فعلم
ان اقواس الدوائر تستعمل في تقدير الزاوية والقطاع

• (الدعوى الثامنة عشرة النظرية) •

مقدار زاوية $a - b$ المرسومة داخل الدائرة هو نصف قوس $a - b$ الواقع بين
محيطي تلك الزاوية فاذا فرض ان المركز داخل الزاوية ورسم قطر $a - b$ ووصل
نقطتي القطر $a - b$ و $c - d$ فزاوية $a - b$ الخارجة عن مثلث $a - b - c$
متساوية لمجموع زوايا $b - c - d$ و $a - c - d$ (انظر المقالة الاولى)
ولكون مثلث $a - b - c$ متساوي الساقين تكون زاوية $a - b - c$ ضعف زاوية
 $a - c - d$ وحيث ان قوس $a - b$ هو مقدار زاوية $a - b - c$ يكون مقدار
زاوية $a - c - d$ نصف قوس $a - b$ وبمثل هذا ثبت ان مقدار زاوية $a - b$
يكون نصف قوس $a - b$ فلذا يكون مقدار $a - b + c - d$ أو $a - c$
نصف قوس $a - b + c - d$ يعنى نصف قوس $a - d$ ويثبت المطلوب
وأما في الصورة الثانية وهي ان يكون مركز $c - d$ خارجا عن زاوية $a - b$
فاذا رسم قطر $a - b$ يكون نصف قوس $a - b$ مقدارا لزاوية $a - b$ كما صرح به
في هذه الدعوى وايضا نصف قوس $a - d$ يكون مقدارا لزاوية $a - d$ فعلى
هذا يكون نصف التفاضل بين هذين القوسين هو نصف قوس $a - d$ مقدارا
لزاوية $a - d$ ومن ثمة يكون مقدار جميع الزوايا المرسومة داخل الدائرة هو
نصف الاقواس الواقعة بين محيطيها ويثبت المطلوب

(نتيجة ١) الزوايا الواقعة في قطعة واحدة مثل زاويتي $a - b$ و $a - c$ الخ
متساوية لان نصف قوس $a - b$ يكون مقدارا لكل واحدة منها

(نتيجة ٢) زاوية $a - b$ المرسومة في نصف المحيط يكون ربع المحيط مقدارا

لها وإذا أريد اثباتها على وجه آخر فنقول إذا وصل نصف قطر a فنكون مثلث a متساوي الساقين تكون زاوية a مساوية لزاوية a وأيضاً من كون مثلث a متساوي الساقين تكون زاوية a مساوية لزاوية a وحيث أنه إذا اجتمعت هذه الأشياء المتساوية تكون الحواصل متساوية فيكون $a + a$ أو $a = a + a$ فعلى هذا مجموع a و a فواضح أن a يكون مساويًا لزاوية a أو مجموع الزوايا الثلاث في المثلث مساوٍ لنصف زاوية a

(نتيجة ٣) الزوايا التي مثل زاوية a الواقعة في قطعة أكبر من نصف المحيط تكون حادة لأن نصف قوس a الأصغر من نصف المحيط يكون مقداره لها وأيضاً الزوايا التي مثل a الواقعة في قطعة أصغر من نصف المحيط تكون منفرجة لأن مقدارها هو نصف القوس الأكبر من نصف المحيط (نتيجة ٤) مجموع الزاويتين المتقابلتين من a ذي أربعة أضلاع المرسوم داخل الدائرة اللتين هما a و a يكون مساوياً قائمتين لأن نصف قوس a يكون مقدار الزاوية a ونصف قوس a هو مقدار a فعلى هذا يكون نصف المحيط مقداراً لمجموع زاويتي a و a ومن ثمة يكون مجموع الزاويتين المتقابلتين مساوياً قائمتين

• (الدعوى التاسعة عشرة النظرية) •

(شكل ٦٩) نصف قوس a الواقع بين محيطي زاوية a الحاصلة من الوتر والخط المماس يكون مقداراً لها فإذا رسم قطر a من a نقطة التماس فنلك القطر يكون عموداً على الخط المماس ولذا تكون زاوية a قائمة وبهذا يكون a نصف المحيط مقداراً لتلك الزاوية ويكون نصف قوس a مقداراً للزاوية a فعلى هذا يظهر أن نصف قوس a ونصف قوس a يعني نصف قوس a يكون مقداراً للزاوية a و a من ثمة يكون مقدار الزاوية a

هو نصف قوس α الواقع بين محيطها

• (الدعوى العملية المتعلقة بالمقالة الأولى والثانية) •

• (الدعوى الأولى العملية) •

(شكل ٧٠) طريقة تنصيف خط α - المستقيم المحدود فتجعل نقطة α و - مركزاً ويعد α كبر من نصف خط α - يرسم قوسان متقاطعان في نقطة ϵ بأن تكون نقطة ϵ على إبعاد متساوية من نقطتي α و - وكذا نقين نقطة ϵ برسم قوسين تحت خط α - وتكون أيضاً نقطة ϵ على إبعاد متساوية من نقطتي α و - فإذا وصل خط ϵ و ϵ بين نقطتي ϵ و ϵ فالخط الموصول يقطع خط α - وينصفه لأنه من كون كل واحدة من نقطتي ϵ و ϵ على إبعاد متساوية من نقطتي α و - يلزم أن يكونا واقعيتين على العمود المخرج من وسط خط α - وحيث أنه لا يمكن الاوصل خط مستقيم بين نقطتي ϵ و ϵ فيكون خط ϵ و هو العمود المذکور ويتقسم خط α - في نقطة ϵ الى قسمين متساويين ويثبت المطلوب

• (الدعوى الثانية العملية) •

(شكل ٧١) طريقة انراج عود من نقطة α الواقعة على خط ϵ - المقروص

نعين نقطتا ϵ و ϵ على أن تكونا على إبعاد متساوية من نقطة α ثم تجعل نقطة ϵ و ϵ مركزاً ونصف قطراً كبر من بعد ϵ - يرسم قوسان متقاطعان في نقطة ϵ فإذا وصل خط α يكون هو العمود المطلوب لأن نقطة ϵ على إبعاد متساوية من نقطتي ϵ و ϵ فتكون واقعة على العمود المخرج من وسط خط ϵ - ومن ثمة كان خط α و هو العمود المذکور

تنبيه اعلم ان انشاء زاوية ϵ و ϵ القائمة على خط ϵ - من نقطة α

يكون كما ذكر

• (الدعوى الثالثة العملية) •

(شكل ٧٢) طريقة انزال عمود على خط $س د$ المستقيم من نقطة $ا$ الخارجة عنه

تجعل نقطة $ا$ مركزا ويرسم قوس بنصف قطر كافى ان يقطع خط $س د$ في نقطتي $و د$ ثم تجعل نقطة $و$ مركزا وتعين نقطة $هـ$ يرسم قوسين متقاطعين ويوصل خط $ا هـ$ فالخط الموصول هو العمود المطلوب لأن $ا هـ$ من نقطتي $ا و$ على ابعاد متساوية من نقطتي $س و د$ ويكون خط $ا هـ$ هو العمود الخارج من وسط خط $س د$ ويثبت المطلوب

• (الدعوى الرابعة العملية) •

(شكل ٧٣) طريقة انشاء زاوية متساوية لزاوية $د$ من $ا$ أحد نقطتي خط $ا ب$

تجعل $ا$ نقطة الرأس مركزا وبأى نصف قطر كان يرسم قوسين $و هـ$ ويعين محيطا زاوية $د$ ثم تجعل نقطة $ا$ مركزا ويرسم قوس غير محدود $س ح$ بنصف القطر المساوى خط $د هـ$ ويوصل وتر $هـ و$ ويجعل نقطة $س$ مركزا ونصف قطر مساو لوتر $هـ و$ يرسم قوس يقطع قوس $س ح$ في نقطة $ز$ فاذا وصل خط $ا ز$ فزاوية $ز ا ح$ الحادثة تكون مساوية لزاوية $د هـ و$ المقروضة لانه اذا وصل وتر $س و$ فحيث ان قوس $س و$ هو استدارا بنصف قطر متساوية ووتر $ا هـ و$ متساويان وأقواس الاوتار المتساوية الواقعة في الدوائر المتساوية تكون متساوية فلذا تساوى زاوية $ز ا ح$ و $د هـ و$ لتساوى قوس $س و$ وهو اللذان هما معياران لتلك الزاويتين ويثبت المطلوب

• (الدعوى الخامسة العملية) •

(شكل ٧٤) طريقة تقسيم قوس معلوم أو زاوية مفروضة الى قسمين متساويين أولا اذا أريد تقسيم قوس α - بتساويين فتجعل نقطة α و - مركزا ونصف قطر واحد يرسم قوسان متقاطعان في نقطة ϵ فاذا وصل بين نقطتي ϵ و α بخط $\epsilon \alpha$ المستقيم فكل نقطة من نقطتي ϵ و α تكون على ابعاد متساوية من α و - نهايتي الوتر المذكور ومن ثمة يكون خط $\epsilon \alpha$ الموصل هو العمود الخارج من وسط الوتر المذكور ويقسم قوس α في نقطة ϵ الى قسمين متساويين (انظر المقالة الثانية)

وثانيا اذا أريد تقسيم زاوية α - الى قسمين متساويين فتجعل α رأس تلك الزاوية مركزا ويرسم قوس α ثم اذا أجريت العمليات كما ذكرنا بانحط $\epsilon \alpha$ يقسم زاوية α - الى قسمين متساويين لكونه قسم قوس α - الذي هو مقدارها فعلى هذه الطريقة التي ذكرت يمكن انقسام كل واحد من قوسي α و ϵ - وأجزاءهما على التوالي الى قسمين متساويين وكذلك يكون تقسيم أي زاوية مفروضة أو قوس معلوم الى أقسام متساوية

• (الدعوى السادسة العملية) •

(شكل ٧٥) طريقة رسم خط مواز لخط α - المعلوم يمر من نقطة α المفروضة

تجعل نقطة α مركزا ونصف قطره مقدار كافي يرسم قوس هو α غير محدود وتجعل نقطة ϵ مركزا ونصف القطر المذكور يرسم قوس α و ϵ ويوشد قوس ϵ مساويا لقوس α فاذا وصلت نقطتا α و ϵ بخط مستقيم فان خط الموصل هو الموازي المطلوب لانه اذا وصل α و ϵ فتساوى قوس α و ϵ الرسمين نصف قطر واحد يلزم تساوي الزاويتين اللتين مقدارهما القوسان المذكوران ومن تساوي الزاويتين المتبادلتين يكون خط $\alpha \epsilon$ موازيا لخط α - (انظر المقالة الاولى)

ويثبت المطلوب

• (الدعوى السابعة العملية) •

(شكل ٧٦) طريقة تعيين الزاوية الثالثة من المثلث اذا كانت زاويتا

ا و - معلوتين

يرسم خط د ه المستقيم غير محدود ومن نقطة ه الواقعة عليه اذ رسمت
زاوية د ه ح مساوية لزاوية ا وزاوية ح ه ر مساوية لزاوية ر
فتكون زاوية ر ه و مساوية للزاوية الثالثة المطلوبة من المثلث لان تلك
الزاويا الثلاث مساوية لقائمتين وكذا اثلاثة زوايا المثلث فن تساوى الزاويتين
القائمتين تساوى الزاويتان الثالثتان وينت المطلوب

• (الدعوى الثامنة العملية) •

(شكل ٧٧) طريقة رسم مثلث علم ضلعه ر و ح وزاوية ا التي

بينهما

يرسم خط د و المستقيم غير محدود ومن نقطة د ترسم زاوية د و ه
مساوية لزاوية ا المعلومة وبؤخذ د ر مساويا لضع ر و و ح
مساويا لضع ح فاذا وصل ح د فمثلث ح د و هو المثلث المطلوب لان
ضلعه والزاوية التي بينهما أنشئت مساوية بالعمل لضع ر و ح وزاوية ا

• (الدعوى التاسعة العملية) •

طريقة رسم مثلث علم منه ضلع وزاويتان

فاعلم انه اما ان يكون كلا الزاويتين مجاورا للضلع المعلوم واما ان تكون احدهما
مجاورة والاخرى مقابلية فان كانت بالصورة الثانية نستخرج الزاوية الثالثة
من المثلث على ما ذكر في الدعوى السابعة وحين تعلم الزاويتان المجاورتان
لذا الضلع يعمل كما سابق

(شكل ٧٨) يرسم خط د ه المستقيم مساويا للضلع المعلوم ومن نقطة د
ترسم زاوية د و ر مساوية لاحدى المتجاورين ومن نقطة ه ترسم
زاوية د ه و مساوية لاحدهما الاخرى فيتقاطع خطا د و و ه و

في نقطة * ويكون مثلث وهو الحادث هو المثلث المطلوب
 * (الدعوى العاشرة العملية) *

(شكل ٧٩) طريقة رسم مثلث اذا كانت اضلاعه الثلاثة $ا$ و $ب$ و $ج$
 معلومة

يرسم خط $هـ$ مساويا لاضلع $ا$ ثم نجعل نقطة $هـ$ مركزا ويرسم قوس
 بنصف قطر مساو لاضلع $ب$ ويرسم قوس من نقطة $د$ بنصف قطر مساو
 لاضلع $ج$ يقطع القوس الاول في نقطة فاذا وصل خط $دو$ و $هو$ فمثلث
 وهو الحادث هو المثلث المطلوب

تنبيه اذا كان أحد تلك الاضلاع اكبر من مجموع الاخرين فالقوسان
 لا يتقاطعان وانما اذا كان مجموع كل ضلعين اكبر من الضلع الاخر فداثما يكون
 اجراء العمل ممكنا

* (الدعوى الحادية عشرة العملية) *

(شكل ٨٠) طريقة رسم مثلث علم منه ضلعان $ا$ و $ب$ وزاوية $ج$
 المقابلة لاضلع $ب$ وهذه الدعوى على وجهين

الوجه الاول هو ان تكون زاوية $ج$ قائمة او منفرجة فتتسا زاوية $هـ$ و
 مساوية لزاوية $ج$ ويؤخذ خط $هـ$ مساويا لاضلع $ا$ ونجعل نقطة $د$
 مركزا ونصنع قوسا واضلع $دو$ يقطع ضلع $هـ$ في نقطة ويرسم قوس
 فاذا وصل خط $دو$ فمثلث وهو الحادث هو المثلث المطلوب

اعلم ان في هذا الوجه الاول لابد ان يكون ضلع $ب$ اكبر من ضلع $ا$
 لان زاوية $ج$ متى كانت قائمة او منفرجة فلا بد لاضلع المثلث المقابل لها ان
 يكون اكبر

(شكل ٨١) الوجه الثاني هو ان تكون زاوية $ج$ حادة وضلع $ا$ اكبر من
 $ب$ فحينئذ اذا أجرى العمل كما صرح به في الوجه الاول في رسم مثلث وهو
 ويكون المثلث المطلوب

(شكل ٨٢) وانما اذا كانت زاوية $ج$ حادة وكان ضلع $ب$ اصغر من ضلع $ا$

فالقوس المرسوم في نقطة هـ بنصف قطر هو المساوي لاضلع -
يقطع ضلع دو في نقطتي و و ر وتكون كل واحدة من هاتين النقطتين
واقعة على نقطة د فاذا وصل خطا هو و هـ فكل من مثلثي
دهو و دهر الحادئين يوافق المطلوب
تنبيه اذا كان في المثلث ضلع - أصغر من العمود النازل من رأس هـ
على قاعدة دو لا يمكن إجراء العمل المذكور بوجه من الوجوه
(الدعوى الثانية عشرة العملية) •

(شكل ٨٣) طريقة رسم متوازي الاضلاع الذي علم منه ضلعا ا و -
التجاوران وزاوية ح التي بينهما

فیرسم خط هـ مساويا لاضلع ا ومن نقطة د ترسم زاوية وده
مساوية لزاوية ح ويؤخذ خط دو مساويا لاضلع - وتجعل
نقطة و مركزا ويبعد هـ يرسم قوس وأيضا تجعل نقطة هـ مركزا
ويبعد د ويرسم قوس آخر يقطع القوس الاول في نقطة ر فاذا وصل
هـ و ر فشكل دهر و هو متوازي الاضلاع المطلوب
لانه يلزم من تساوي الاضلاع المتقابلة فيه بالعمل ان يكون ذلك الشكل
متوازي الاضلاع (انظر مقالة ا) وحيث ان اضلاعه وزواياه تساوي
بالعمل الضلعين المعالمين والزاوية المفروضة يكون ذلك الشكل هو المتوازي
الاضلاع المطلوب

(تنبيه) اذا كانت الزاوية المعلومة المفروضة قائمة وكان الضلعان المتجاوران محاذيين
يكون ذلك الشكل مستطيلا واذا تساوى الضلعان مع قيامهما يكون مربعا
(الدعوى الثالثة عشرة العملية) •

طريقة تعيين المركز الجوهول لدايرة مفروضة أو قوس معلوم

(شكل ٨٤) فنعين ثلاث نقط ا و - و ح بحيثما اتفق
في المحيط المقروض أو القوس المعالم ويوصل أويتوهم وصل وترتي
ا - و - ثم ينصف هذان الوزان بعمودي هـ و و

نقطة ح التي تقاطع العمودين المذكورين هي المركز المطلوب
لان كل واحد من هذين العمودين يمر بالمركز فمن هذا يظهر ان نقطة ح
التقاطع المشترك هي المركز المطلوب

تنبيه طريقة رسم دائرة تمر من ثلاث نقاط مفروضة مثل ا - ب - و
كطريقة رسم دائرة على مثلث ا - ب كما صرح به
(الدعوى الرابعة عشرة العملية)

طريقة رسم خط مماس لدائرة معلومة من نقطة مفروضة
(شكل ٨٥) اذا كانت نقطة ا المفروضة واقعة على محيط الدائرة يرسم
نصف قطر ا ح فاذا أخرج عمود ا د على النصف قطر المذكور من نقطة
ا فهذا العمود هو المماس المطلوب

(شكل ٨٦) واذا كانت نقطة ا واقعة خارج الدائرة كما يرى من هذا
الشكل يوصل بين نقطة ا وبين مركز الدائرة بخط ا ب المستقيم وينصف
خط ا ب المذكور في نقطة ح وتجعل نقطة ح مركزا ويعد ا ح
يرسم محيط دائرة فاذا وصل خط ا - ب المستقيم بين نقطة ا ونقطة
ب التي هي تقاطع المحيط المرسوم بمحيط الدائرة المفروضة لنقط ا - ب
هو المماس المطلوب

لانه اذا وصل ب - ج فزاوية ب - ج - ا الحادة تكون قائمة لوقوعها
في نصف الدائرة فلذا خط ا - ب يكون مماسا بكونه هو دأ على نهاية نصف
قطر ب - ج

تنبيه اعلم انه متى كانت نقطة ا المفروضة واقعة خارج الدائرة يمكن ان يرسم
منها خطان مماسان للدائرة المذكورة وهما ا - ب و ا د ويكونان
متساويين لان في مثلثي ب - ا - د و د - ا - ب القاطي الزاوية وتر ا ب مشترك
ومثلثي ب - د - و و د - ا - ب متساويان لكونهما انصاف اقطار
فمن تساوى هذين المثلثين يكون ا د = ا ب وحيث ان تكون زاوية
ب - ا - د مساوية لزاوية د - ا - ب

• (الدعوى الخامسة عشرة العملية) •

(شكل ٨٧) طريقة رسم دائرة داخل مثلث $ا - ب - ج$ المقروض تقاس
باضلاعه الثلاثة

فأقول إذا نصفت زاويتنا $ا$ و $ب$ من المثلث المذكور بخطي $ا ح$
و $ب ح$ فهذان الخطان يتقاطعان في نقطة $د$ ومن نقطة $د$
إذا أنزلت عماد $د ح$ و $د ه$ و $د و$ على ثلاثة اضلاع المثلث فهذه
العواميد تكون متساوية لان زوايا $د ا ح$ و $د ب ح$ او متساويتان
بالعمل وزوايا $د ا ح$ و $د ب ح$ أيضا متساويتان لقيامهما متبقي زاوية
 $ا ح د$ الثالثة مساوية كذلك زاوية $ا ح و$ ولاشترط ان ضلع $ا ح$
في مثلثي $ا ح د$ و $ا ح و$ ولتساوي متبقي الزوايا المجاورة له فيكون المثلثان
المذكوران متساويين ولذا يكون $د ح = د ه$ و $د ح = د و$ وبمثل هذا ثبت
ان مثلثي $ب ح د$ و $ب ح و$ أيضا متساويان ويكون $د ح = د ه$
فعلى هذا تكون اعمدة $د ح$ و $د ه$ و $د و$ متساوية فاذا
جئت نقطة $د$ مركزا ونصف قطر $د ح$ رسم محيط دائرة فهذا
ال محيط يكون هو المحيط المرسوم داخل مثلث $ا - ب - ج$ المناسب لاضلاعه
الثلاثة لان ضلع $ا - ب$ هو العمود الخارج من نهاية نصف قطر $د ح$
ومن هذا يصح كون عماسات تلك الدائرة وكذلك ضلعا $ب - ج$ و $ا - ج$
يكونان عمليين كما تقدم وتكون تلك الدائرة المرسومة مماسة لاضلاعه الثلاثة
وبهذا ثبت المطلوب

تبينه الثلاثة خطوط التي تنصف ثلاث زوايا مثلث لا يدان تساقط في نقطة
واحدة

• (الدعوى السادسة عشرة العملية) •

(شكل ٨٨ و ٨٩) طريقة رسم قطعة دائرة على خط $ا - ب$ المستقيم
المقروض تكون قاطعها لاحاطة زاوية $ا$ المعلومة يعنى المطلوب رسم قطعة دائرة
تكون كل زاوية مرسومة في تلك القطعة مساوية لزاوية $ا$ المقروضة

فالقول بخط α - المستقيم جهة - ومن نقطة - ترسم زاوية
هـ - مساوية لزاوية γ المقروضة ويقام عمود - ح - على خط هـ -
وعود - ح - على وسط خط α - فنقطة ح - التي هي تقاطع العمودين
تجعل مركزا ونصف قطر ح - ترسم دائرة تقطعة هذه الدائرة وهي α -
هي القطعة المطلوبة.

لان خط - هـ - المستقيم بجهة - وحيث ان خط - و - عود مخرج من
نهاية نصف قطر ح - يكون عمسا للدائرة ويكون نصف قوس α -
مقدارا لزاوية α - و

وحيث ان نصف قوس α - صار معيارا لزاوية α - وهي
محيطية ظهورها مساوية لزاوية α - أو مساوية لها هـ - والمعنى
ان زاوية α - مساوية لزاوية γ المقروضة ومن ثمة ثبت المطلوب
وهو ان جميع الزوايا المرسومة في قطعة α - تكون مساوية لزاوية
 γ المقروضة

تبيته اذا كانت الزاوية المقروضة قائمة فالقطعة المطلوبة تكون هي نصف
الدائرة المرسومة على قطر α -

(الدعوى السابعة عشرة العملية)

(شكل ٩٠) طريقة استخراج عدد تناسب الخطين المستقيمين المقروضين

α - و γ - وبينهما مقاييس مشتركة

أولا يوضع خط γ - الاصغر على خط α - الاكبر ثم تعين مقدرا و عددا اشتغال
الخط الاكبر على خط γ - الاصغر فان اشتغل عليه مرتين وثلاثي - هـ - فضله
توضع على خط γ - فاذا اشتغل γ - عليها مرتين وبقيت فضلة δ - توضع
هذه الفضلة على فضلة - هـ -

فاذا اشتغلت - هـ - عليها مرة واحدة وبقيت δ - توضع δ - وهي الفضلة
الثانية على - هـ - وهي الفضلة الاولى فاذا اشتغلت عليها مرة واحدة وبقيت
 δ - فضلة توضع هذه الفضلة الثالثة وهي - ر - على الفضلة الثانية وهي

د و معين كم اشتقاها عليها وأيضا اذا وضعت الفضلة الباقية على الفضلة السابقة وهكذا حتى اشتقلت السابقة على الباقية بتمامها تكون هذه الفضلة الاخيرة مقياسا مشتركا للخطين المستقيمين المقروطين فاذا جعلت تلك الفضلة الاخيرة كواحد تقدر بها قيمة الفضلات التي تقدمت وقيمة الخطين المقروطين ويتعين من هذا التقدير نسبة تعدد الخطين المذكورين

مثلا اذا كانت فضلة د الاخيرة تشتغل عليها د و مرتين تكون مقياسا مشتركا للخطين المقروطين

مثلا اذا فرض ان د = ١ يكون د و = ٢ لكن فضلة د و اشتقت عليها فضلة هـ مرة وبقيت د فضلة فتكون هـ = ٣ وحيث ان هـ اشغل عليها خط د مرة وبقيت د و فضلة يكون

$$د = ٥$$

واخيرا حيث ان خط د احتوا على خط ا مرتين وبقيت هـ فضلة يكون ا = ١٣ ومن ثمة يظهر ان النسبة بين خطي ا و د كالنسبة بين عددي ١٣ و ٥ فاذا كان خط د واحدا فنسبته اليه تكون $\frac{١٣}{٥}$

واذا كان خط ا واحدا يكون خط د = $\frac{٥}{١٣}$

فبعبارة هذه العمليات التي أجريت في هذه الدعوى هي عين العمليات التي أجريت في استخراج القاسم المشترك الاعظم فلا حاجة الى بسط اثبات آخر في هذا المقام

وتارة يجري العمل متواليا والفضلة الاخيرة لم يمكن ان تشتغل عليها التي قبلها اشتغالاً تاما واذا يستدل ان لا مقياس مشترك بين هذين الخطين وكل يسمى اسم كابين ضلع المربع وقطره وبسبب ذلك ان شاء الله تعالى بحته ولا توجد بينهما نسبة حقيقية وانما يجري العمل مهما أمكن حتى تصير الفضلة الاخيرة أدنى جزء لا يبايه واذا تكون النسبة بينهما تقريبية تكاد ان تكون حقيقية

(الدعوى الثامنة عشرة العملية) •

(شكل ٩١) طريق استخراج المقياس المشترك بين زاويتي ١ و ٢ -
 ان كل منهما مقياس مشترك وبه يوجد عدد تناسب هاتين الزاويتين
 فاذا جعلت رأس الزاويتين مركزا ورسم قوسا γ و δ هو بانصاف أقطار
 متساوية فهذان القوسان γ و δ يكونان مقدارين لهما ثم بقدر القوسان
 كما صرح به في الدعوى التي تقدمت لانه يمكن تطبيق الاقواس المتساوية
 أنصاف الاقطار كتطبيق أحد المستقيمين على الآخر كما لا يخفى وبهذا العمل
 يحصل المقياس المشترك بين قوسى γ و δ و هو ان كان موجودا
 وتوجد نسبة تعداد القوسين وهى عين ما بين الزاويتين وان كان قوس
 δ مقياسا مشتركا بين قوسى γ و δ هو فزاوية δ تكون
 معيار الزاويتين وهو الظاهر
 تبينه بهذا يمكن تعيين مقدار زاوية بتقدير القوس الذى هو معيارها مع المحيط
 الكامل مثلا اذا كانت نسبة قوس γ الى المحيط كنسبة عدد ٣
 الى عدد ٢٥ يكون مقدار زاوية $\gamma = \frac{3}{25}$ من أربع قوائم أو $=$
 $\frac{12}{100}$ من قائمة وتارة لا يوجد المقياس المشترك بين الزاويتين حينئذ يجرى
 العمل على التوالى حتى ينتهى الى النسبة تقريبية تكاد ان تكون تحقيقية
 كما تقدم وهذا الظاهر

• (تمت المقالة الثانية) •

المقالة الثالثة

في خصوصية تناسب الاشكال

المحدود

من المتقدمين كقلبيدس
وغيره وكثير من المتأخرين
استعملوا لفظ المساواة في
مطاق الاشكال المتساوية
الساووح وان كانوا ذكر
في تأليفهم انه قد يساوي
المثلث مربعا والمربع
مستطلا والمثلث الزاوي
هذا الكتاب فقد استعمل
لفظ المساواة في الاشكال
الممكنة التطبيق وخصص
ذلك بها وأما الاشكال
المتساوية مساحة فقط
فسميت عنده متكافئة أو
متقاومة في هذه الترجمة
سلكت الطرق على اسلوب
المؤلفين واذا اقتداء بآلية
فسميت الاشكال التي يمكن
تطبيقها اشكالا متساوية
والتي لا يمكن تطبيقها مع
اشكال مقدارها متكافئة
أو متقاومة اه

- ١ الاشكال المتساوية مساحة تسمى اشكالا متكافئة أو متقاومة مثلا
قد يمكن تكافؤ الشكين مساحة وان كانا مختلفي الهيئة مثلا يمكن ان تكافؤ
الدائرة مربعا والمثلث مستطلا وهكذا الخ
فالاشكال المتساوية كالدوائر المتساوية اصناف الاقطار والمثلثات
المتساوية الاضلاع المتناظرة أعني الاشكال التي اذا وضع أحدها على الآخر
تنطبق كل نقطة على تطيرتها كمال الانطباق تسمى أشكالا متساوية من باب
أولى .
- ٢ اذا تساوت الزوايا المتناظرة من شكين وتناسبت الاضلاع فهذان
الشكلان يسميان متشابهين والاضلاع المتناظرة تطلق على الاضلاع
المقصدة في الوضع أعني الاضلاع التي تحيط بالزوايا المتساوية وهي ما يسمى
زوايا متناظرة
كل شكين متساويين فهما متشابهان واما الاشكال المتشابهة فتارة لا يكون
بينهما شيء من المساواة أصلا فن هذا علم ان كل شكين متساويين متشابهان
ولا عكس
- ٣ الأقواس المتشابهة والقطع المتشابهة والقطوع المتشابهة في الدوائر
المتختلفة أعني غير المتساوية تطلق على الأقواس والقطع والقطوع التي تقابل الزوايا
المركزية المتساوية
- (شكل ٩٣) مثلا اذا تساوت زاوية د زاوية ا ف قوس د ه
يشابه قوس د ه وقطاع ا د ه يشابه قطاع د ه وهكذا الخ
- ٤ (شكل ٩٤) ارتفاع الشكل التوازي الاضلاع هو عود د ه

اعني البعد الحقيقي بين ضلعي α و β المتقابلين الذين كل منهما يسمى قاعدة

٥ (شكل ٩٤) ارتفاع المثلث هو α و β التنازل من α رأس المثلث على ضلعه β المقابل لها الذي يسمى قاعدة

٦ (شكل ٩٥) ارتفاع شبه المنحرف هو α و β المحصورين ضلعي α و β المتوازيين

٧ مساحة الشكل وسطعه بمعنى واحد تقريرا غير ان لفظ المساحة يطلق على سعة وجه شكل أو يستعمل في تقدير سطح الشكل بسطح شكل آخر

اعلم ان معرفة هذه المقالة والمقالات اللاحقة وادراكها كما ينبغي يتوقف على معرفة أصول النسبة والتناسب فيانم التأمل وصرف الذهن في ادراك أصل حقيقة التناسب وينبغي ترك المبهمات والمشكلات التي تعرض في التقرير والتلفظ من أجل ذلك كان اوضح الملاحظات التي يحتاج اليها عند صرف الذهن من باب أولى وان لزم من مراجعة الكتب الجبرية

مثلا اذا تناسبت هذه المقادير الاربع $a : b :: c : d$ يعلم ان حاصل ضرب طرفي $a \times d$ يساوي حاصل ضرب وسطى $b \times c$ ولا ريب في هذا كما صرح به في قواعد علم الحساب وكل جسم أو مقداريتين أو يتصور في الذهن تعيينه باعداد معينة a و b يمكن ان يفرض ذلك في كل وقت مثلا اذا كانت مقادير a و b و c و d خطوطا وكان احد هذه الخطوط أو خط خامس آخر واحدا لها ومقياسا مشتركا بين كافة تلك الخطوط يظهر عدد من قياسها بذلك الواحد سواء كان كل واحد من خطوط a و b و c و d مضاعفا أو كسرا منقطا أو أصغر فعلم ان النسبة بين هذه الخطوط تجري مجرى النسبة التي بين الاعداد الحسابية العادية فيقال لحاصل ضرب ضلعي a و b مستطيل $a \times b$ من أجل ذلك كان مستطيل $a \times d$ بمعنى المستطيل الذي يحصل من العدد المشغل

عليه خط α بضربه في العدد الذي يشقل عليه خط δ ويسهل علينا بطريق
مستقيم كما مر

وهو ان مستطيل $\alpha \delta$ يساوي مستطيل $\gamma \epsilon$ ويعلم ان α و γ -
من جنس واحد مثلاً اذا كانا من جنس الخط وكان مقدار γ و δ -
من جنس السطح فينظر الى الجميع كالاعداد الحسابية
فاذا كان مقدارا α و γ - معينين بالاحد الخطي فيعين مقدار α
 γ و δ بالاحد السطحي وفيه يصكون مانع منها عدد مثل حاصل
 $\alpha \times \delta$ و حاصل $\gamma \times \epsilon$ وما في جميع العمليات التي تجرى بطريق
النسبة والتناسب يلزم دائماً ان ينظر اليها مثل اعداد كل جنس يوافق تلك
النسبة وحدودها ولا عسر في نظره ولا في النظر فيما يحصل منه ولا في اجراء
عمله أبداً

ولا يخفى انه تارة يبقى على القواعد السابقة من علم الجبر في اثبات دعوى هذه
الهندسة وهذا مستند الى البديهية أعني العلوم المتعارفة فاستحسن ذكر تلك
القواعد في هذا المجل مثلاً اذا كان $\alpha = \beta + \gamma$ وضرب كل من طرفي
هذه المساواة في δ فيظهر $\alpha \times \delta = \beta \times \delta + \gamma \times \delta$ م
وأبداً اذا كان $\alpha = \beta + \gamma$ و $\delta = \epsilon + \zeta$ واجتمعت اطراف هذه المساواة فيكون $\alpha + \beta = \delta + \zeta$
هـ - فان حذفت المقدارين عيننا المتعاقبين علامة الواقعة
في احدى طرفي المساواة فيكون $\alpha + \beta = \delta + \zeta$ هـ وقس على هذا
ولكن الاحسن انه حين نقرأ الهندسة ينظر الى علم الجبر كلما يحتاج اليه القارئ
والاولى انه ما يدرك من معانيها من المنافع والتوافق الذي بينهما - ما لان
تطبيق الجبر على الهندسة هو من أقدم الفنون وأشدها يحتاج اليه عند
التفصيل الطالبون ومن ترجم هذا الكتاب من القرن اوى الى التركي حضرة
الحبر الاعظم و اساتذنا الاكرم ميرزا تقى اذهب الى المصدر مطالعته العلية كتاب
الجبر الذي هو تأليف المهندس رفيع وهو من كتب الجبر التي تدوين

بارض فرائضة وأعلم ديارها وهو مشغل على جلدين أحدهما يسمى الجلد
الاول والاخر يسمى الجلد الثاني فوجدته كغير المنافع فامر بترجمته من
الفرنساوى الى العربى وان شاء الله تعالى تيسر ترجمته من العربى الى التركى ليم
تقع جميع اهل ملتنا الاحدية على صاحبها افضل الصلاة والتحية وما توفيق
الابالله وبه نتقى

• (الدعوى الاولى النظرية) •

الاشكال المتوازية الاضلاع المتساوية القاعدة والارتفاع تكون متكاثرة
مثلا (شكل ٩٦) فى المتوازي الاضلاع $ا ب د ه$ و $ا ب ه و$ خط $ا$
قاعدتهما مشتركة وتساوى ارتفاعهما بالافرض توجد قواعدهما العليا
التى هى $د ه$ و $ه و$ على خط مستقيم واحد متوازي لخط $ا ب$ وتساوى
الاضلاع المتقابلة فى الشكل المتوازي الاضلاع يكون $ا د = ب ه$
و $ا ه = ب د$ وكذلك من كون $د ه = ا ب$ و $ه و = ا ب$
فيكون $د ه = ه و$ فان اضيق بصر $د و$ على كل من خطى
 $د ه$ و $ه و$ المتساويين يصير $د ه$ و $د و$ متساويين فعلى هذا
تكون اضلاع مثلثى $د ا و$ و $د ه ه$ الثلاثة متساوية ويكون
المثلثان المذكوران متساويين (شكل ٩٦) فعلم انه اذا طرح من
 $ا د ه$ الشكل ذى اربعة اضلاع مثلث $ا د و$ يبق المتوازي الاضلاع
 $ا ب ه و$ ومنه اذا طرح ايضا مثلث $د ه ه$ يبق المتوازي الاضلاع $ا ب د ه$
وتساوى البواقى من الاشياء المتساوية اذا طرحت منها اشياء متساوية
ظهر ان شكلى $ا ب د ه$ و $ا ب ه و$ المتوازي الاضلاع المتساوي القاعدة
والارتفاع يكونان متقاويين

(تقيية) (شكل ٩٧) متى اخذت قاعدة متوازي الاضلاع $ا ب د ه$ ومستطيل
 $ا ب ه و$ وارتفاعهما يكونان متكاثرتين

• (الدعوى الثانية النظرية) •

اذا كانت القاعدتان والارتفاعان متساوية فى مثلث $ا ب د$ ومتوازي

الاضلاع ا-د (شكل ٩٨) فيكون المثلث نصف متوازي الاضلاع لان
مثلث ا-د-ه مساو لثلث ا-د-ز

(نتيجة ١) مثلث ا-د-ز الواقع على قاعدة د-ه نصف مستطيل د-ه-و
لانه يقاوم متوازي الاضلاع ا-د-ز
(نتيجة ٢) جميع المثلثات المتساوية القواعد والارتفاعات تكون متكافئة

«(الدعوى الثالثة النظرية)»

المستطيلان المتساويان الارتفاع النسبة بينهما كالتسوية بين قاعدتيهما
مثلا (شكل ٩٩) مستطيلان ا-د-ه و ا-د-و المشترك فيهما
ارتفاع ا-د تكون النسبة بينهما كالتسوية بين قاعدتيهما ا-د و ا-ه
فلا بد ان يفرض بين قاعدتي ا-د و ا-ه مقياس مشترك مثلا بان تكونا
كاعداد ٧ و ٤ فاقول اذا قسمت قاعدة ا-د الى سبعة اقسام
متساوية فقاعدة ا-ه تحتوي من تلك الاقسام اربعة فاذا اقم على
القاعدة من كل من نقط التقسيم هود فيصير سبعة مستطيلات متساوية
متساوية لان تلك المستطيلات متساوية القواعد والارتفاعات فمستطيل
ا-د-ز يحتوي على سبعة مستطيلات ومستطيل ا-د-و يحتوي على
اربعة مستطيلات فقط فعلى هذا تكون نسبة مستطيل ا-د-ه الى
مستطيل ا-د-و كسبعة عدد ٧ الى عدد ٤ او كنسبة قاعدة
ا-د الى قاعدة ا-ه وتجري هذه الطريقة كما ذكر في اعداد هـ من سائر
النسب التي يفرض فيها مقياس مشترك فلذا كانت ا-د-ه : ا-د-و
:: ا-د : ا-ه

(شكل ١٠٠) وفي الصورة الثانية اذا لم يفرض بين قاعدتي ا-د و ا-ه
مقياس مشترك فلا تزال ايضا ا-د-ه : ا-د-و :: ا-د : ا-ه
فانه ان لم يكن هذا التناسب صحيحا تبقى الثلاثة حدود الاول على حالها ويكون
رابع متناسب لها اكبر أو أصغر من ا-ه مثلا اذا كان التناسب الرابع
اكبر من ا-ه يعني ان كانت ا-د-ه : ا-د-و :: ا-د : ا-ه

فإذا قسم خط $ا$ - الى أقسام متساوية كل قسم يكون أصغر من $هـ$ ح
حتى تقع نقطة $ط$ إحدى نقاط التقسيم بين نقطة $هـ$ وبين نقطة $ح$
فلذا أقيم منها عمود $طد$ على خط $ا ط$ ولوجود المقياس المشترك بين
قاعدتي $ا - و$ $ا ط$ تكون نسبة $ا - ح$: $ا ط$ و $ا ط$ و $ا - و$::
 $ا - ح$: $ا ط$ كما صرح به في الشق الاول من هذه الدعوى وقد فرض ان
 $ا - ح$: $ا ط$ و $ا ط$: $ا - و$:: $ا - ح$: $ا ط$ ومن تساوي المقدمات
يحصل من التوالى تناسب $ا ط$ و $ا ط$: $ا ط$ و $ا ط$: $ا ط$:: $ا ط$: $ا ط$
فعلى هذا حيث ان مقدار $ا - ح$ اكبر من مقدار $ا ط$ لا بد ان يكون
مستطيل $ا ط$ و $ا ط$: $ا ط$ مستطيل $ا ط$ و هذا يوجب ان الجزء $ا ط$ اكبر
من الكل وهو محال ومن ثمة لا يمكن صحة ذلك التناسب ولا تكون نسبة
مستطيل $ا - ح$ الى مستطيل $ا ط$ و $ا ط$: $ا ط$ كسبة قاعدة $ا - ح$ الى مقدار
أكبر أو أصغر من $ا ط$ سواء كان بين تلك القاعدتين مقياس مشترك أو لا
وبه ثبت المطلوب من ان تكون نسبة مستطيل $ا - ح$ الى المستطيل
 $ا ط$ و $ا ط$ كسبة قاعدة $ا - ح$ الى القاعدة $ا ط$

• (الدعوى الرابعة النظرية) •

(شكل ١٠١) $ا - ح$ و $ا ط$ و $ا ط$ أي مستطيلين النسبة بينهما
كسبة حاصل ضرب القواعد بالارتفاعات فيهما يعني تكون نسبة
 $ا - ح$: $ا ط$ و $ا ط$: $ا ط$:: $ا ط$: $ا ط$ و $ا ط$: $ا ط$:: $ا ط$: $ا ط$
المستطيلين يفرض ان الزاويتين المتقابلتين رأسهما مجتمعتان في نقطة
 $ا$ فاذا امتد خطا $ا ط$ و $ا ط$ على الاستقامة حتى يلتقيان في نقطة
 $ح$ ولا يتحد ارتفاعهما وهو $ا ط$ في مستطيل $ا - ح$ و $ا ط$ و $ا ط$
تكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتي $ا - ح$ و $ا ط$ وأيضا لاشتراك
ارتفاع $ا ط$ بين مستطيل $ا ط$ و $ا ط$ و $ا ط$ تكون النسبة
بينهما كالكسبة بين قاعدتيهما $ا ط$ و $ا ط$ ومن ثمة يظهر هذان
التناسبان

وضعت مستطيلهما

مثلا (شكل ١٠٦) اذا قسم خط a الى قسمين a و b فالربيع
المشاعلى خط a الكامل يحوى على مربعى قسمي a و b
ومستطيلين من نوع مستطيل حاصل من القسمين المذكورين يعنى a او

$$(a+b) = \frac{a^2}{a} + \frac{b^2}{b} + a \times b$$

فاذا رسم مربع a ده واخذوا مساويا القسم a ورسم خط
ور موازيا لخط a و b موازيا لخط a فربيع a ده
ينقسم الى اربعة اقسام القسم الاول a طو هو المربع المرسوم على قسم
 a لان a مساو a بالعمل والقسم الثانى طو b هو المربع
المرسوم على قسم b لان $a = b$ و $a = b$ او فيكون تفاضل
 $a - b =$ تفاضل $a - b$ او فلذا صار $b = b$
ولكن من خاصية التوازي ان يكون ط $b = b$ و $b = b$ فصار
قسم b و ط هو المربع المرسوم على قسم b فاذا طرح مربعاهذين
القسمين من المربع الكامل يبقى مستطيل b ط و b وط a كل
واحد منهما مساو لمستطيل a و b ومن ثمة ثبت المطلوب من ان
يكون مربع خط a الكامل مساويا لمجموع مربعي a و b
وضعت مستطيلهما

تجيبه ايضا بهذه الطريقة ثبت في علم الجبر في بيان تربيعة الكمية ذات الحدين

$$(a+b) = \frac{a^2}{a} + \frac{b^2}{b} + a \times b$$

• (الدعوى التاسعة النظرية) •

(شكل ١٠٧) اذا كان خط a تفاضلى خطى a و b فالربيع
المرسوم على خط a يساوى بمجموع مربعي a و b اذا طرح منه
ضعف مستطيل a و b يعنى يكون a او $(a-b)$

وان قسم $س = ك$ مساو لمسطيل $هـ د د$ لكون $س ح = د هـ$
 و $س ك = هـ د$ كما لا يخفى فلذا صار $ا ك هـ د = ا س ح د +$
 $هـ د د$ وهما التقاضيل بين مربع $ا س ط$ ومربع $د ر$ الذى هو
 مربع $د ع$ ظر ومن غنة ثبت المطلوب من ان يكون $(ا + س)$

$$\times (ا - س) = \frac{س^2}{س - ا} - \frac{س^2}{س + ا}$$

نتيجه وكذلك رقت هذه الدعوى في علم الجبر هكذا $(ا + س) \times (ا - س) =$

$$\frac{س^2}{س - ا} - \frac{س^2}{س + ا}$$

• (الدعوى الحادية عشرة النظرية) •

في كل مثلث قائم الزاوية المربع المشاعلى الوتر يساوى مجموع المربعين المتشأين
 على الضلعين الآخرين

(شكل ١٠٩) اتفق رسم مربع على كل من ثلاثة اضلاع مثلث $ا س د$
 الذى زاويته $آ$ قائمة ونزل عود $ا د$ من زاوية $آ$ القائمة على وترها
 وامد على استقامته الى نقطة $هـ$ ووصل وتر $ا د$ و $د ع$ فالتثلثان
 المثلثان اعنى $ا س د$ و $س د هـ$ يكونان متساويين لتساوى منق
 الاضلاع منهما والزوايا التى بينهما لان $ا س$ و $س د$ متساويان لكونهما
 ضلعى مربع واحد وكذلك $س د = د هـ$ وباضا زاوية $ا س د$
 و $س د هـ$ متساويان لان كل واحد منهما مبركبة من زاوية $ا س د$
 وزاوية $د ر د$ القائمة او $ا س ح$ القائمة الاخرى (مقالة ١)
 فمثلث $ا س د$ هو نصف متوازى الاضلاع $س د هـ د$ وهو لاقصا
 قاعدة $س د$ وارتفاعه $س د$ وكذلك مثلث $د س هـ$ نصف مربع
 $ا د$ لانه يلزم من كون زاويته $ا د هـ$ و $ا ط$ قائمتين ان يكون
 خط $ا د$ و $ا ط$ خطا مستقيما واحدا وازى ضلع $د س$ وبهذا
 يصكون مثلث $د س هـ$ نصف مربع $ا د$ لاقصا هما فى قاعدة
 $س د$ وارتفاع $ا د$ وتساوى مثلث $ا س د$ مثلث $د س هـ$ كما

مربعه يكون مستطيل وهو الذى هو ضعف مثلث ا د هـ وبمثل هذا يثبت
 مكافئ المربع ا ح الذى هو ضعف مثلث ح د هـ وبمثل هذا يثبت
 ككون مستطيل وهو مكافئ المربع ا ب وحيث حصل مربع
 ح د هـ من مجموع مستطيلى د هـ و ح د هـ يكون مربع ح د هـ
 المتشاعلى وتر القائمة مساويا لمجموع مربعى ا ح ط و ا د هـ المتشايين
 على الضلعين الاخرين ويثبت المطلوب

$$\frac{f}{a} + \frac{f}{a} = \frac{f}{c} \quad \text{وتلقا الدعوى تعين بهذا الوجه بالعلامة}$$

(نتيجة ١) مربع كل ضلع من الضلعين المحيطين بالقائمة يكون مساويا لتفاضل

$$\frac{f}{a} - \frac{f}{c} = \frac{f}{a} \quad \text{مربع وتر القائمة ومربع الضلع الاخر نحو}$$

(نتيجة ٢) (شكل ١١٨) مق كان ا د هـ مربعا و ا د قطره
 يكون مثلث ا د هـ متساوى الساقين قائم الزاوية فلذا يكون

$$\frac{f}{a} = \frac{f}{c} + \frac{f}{a} = \frac{f}{a} \quad \text{فعلى هذا يكون المربع المرسوم}$$

على قطر ا د ضعف المربع المرسوم على ضلع ا ب فلجل ادراك خواص
 هذه الدعوى اذا رسم من نقطتى ا و ب خطان مستقيمان موازيان لقطر

د هـ ومن نقطتى د و ب خطان موازيان لقطر ا د فمربع
 هـ د ح الحادث هو مربع ا د وهو يتوى على غاية امثال مثلث ا د هـ

واما مربع ا د هـ فيصوى على اربعة مثلثات من مثله فقط فلذا
 ظهر ان مربع هـ د ح المتشاعلى القطر هو ضعف مربع ا د هـ المتش

على الضلع ومن ثمة كانت $\frac{f}{a} : \frac{f}{c} :: ٢ : ١$ فاذا اخذ جذر

المقادير ايضا يسير $\frac{f}{a} : \frac{f}{c} :: ٢ : ١$ وقد علم ان لا جذر

جميع العدد ٢ فبين انه لا مقياس مشترك بين ضلع المربع وقطره وهذه
 الموصوفة تستدرك تفصيلا موضحا قياسا من العمليات الاخر

(نتيجة ٣) (شكل ١٠٩) لقد ثبت في شكل العروس ان مربع ا ح مساو

مستطيل $س ه و$ ولا تتحدد ارتفاع $س و$ في مربع $س د و$ ومستطيل
 $س ه و$ تكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتي $س د و$ و $س ه و$
 وبه صارت $س د : آ : آ : س ه :: س د : س ه$ فعلى هذا تكون نسبة
 مربع وتر القائمة الى مربع أحد الضلعين المحيطين بها كنسبة وتر القائمة
 الى السهم المجاور لذلك الضلع وفي هذا المثل ما يسمى بهم هوقسم وتر القائمة
 المحدود بالعمود النازل من رأس القائمة على وترها فلذا يكون قسم $س و$
 هو السهم المجاور لضلع $ا ب$ وأما قسم $د ه$ فهو السهم المجاور لضلع $ا ج$

ومن ثمة صارت $س د : آ : آ : س ه :: س د : س ه$
 (نتيجة ٤) من افتداد الارتفاع في مستطيل $س ه و$ و $س د و$
 كانت النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما $س د و$ و $س ه و$ وانكافؤ هذين
 المستطيلين بمربعي $آ$ و $آ$ تكون $آ : آ : آ : س د :: س د : س ه$
 ومن هذا صارت النسبة بين مربعي الضلعين المحيطين بالقائمة كالنسبة بين
 السهمين المجاورين لذلك الضلعين

• الدعوى الثانية عشرة النظرية •

في كل مثلث فاضل مربع وتر الخلة وبمجموع مربعي الضلعين الباقيين
 هو قدر ضعف مستطيل ضرب القاعدة فيهما بين موقع العمود وتلك الزاوية
 الخلة

مثلا (شكل ١١٠) اذا كانت زاوية $د$ في مثلث $ا ب د$ حادة يكون مربع
 $ا ب$ الموتر لها اصغر من مجموع مربعي $ا ج$ و $س د$ المحيطين بها
 فاذا اتزل عمود $ا و$ على قاعدة $س د$ فالتفاضل مساو لضعف
 مستطيل $س د \times س و$ فلذا اذا طرح ضعف مستطيل $س د \times س و$
 من مجموع مربعي $س د$ و $ا ب$ فالباقي يساوي مربع $ا و$

فيكون $ا ب^2 = س د^2 + س و^2 - 2 \times س د \times س و$ بهان هذا

الدعوى على ضربين

الاول وهو ان يكون العمود داخل مثلث $ا ب ج$ فيكون $ا ب = ج$

$ج = ج$ ومن ثمة صار $\frac{ج}{ج} = \frac{ج}{ج} + \frac{ج}{ج} - ج^2 = ج \times ج$ كافي

(٩) فاذا زيد على هذين المتساويين مربع $ا$ يكون $\frac{ج}{ج} + \frac{ج}{ج}$

$= \frac{ج}{ج} + \frac{ج}{ج} + \frac{ج}{ج} - ج^2 = ج \times ج$ لكن من كون

مثلثي $ا ب ج$ و $ا ج د$ قائمي الزاوية لزم ان يكون $\frac{ج}{ج} = \frac{ج}{ج}$

$+ \frac{ج}{ج}$ ويكون ايضا $\frac{ج}{ج} = \frac{ج}{ج} + \frac{ج}{ج}$ فاذا استبدلت هذه

الاشياء المتساوية بما يساويها يكون $\frac{ج}{ج} = \frac{ج}{ج} + \frac{ج}{ج} - ج^2$

$ج \times ج$

الصورة الثانية وهو ان يكون العمود واقعا خارج مثلث $ا ب ج$ فن كون

$ج = ج - ج$ يكون $\frac{ج}{ج} + \frac{ج}{ج} = \frac{ج}{ج}$

$- ج \times ج$ فاذا زيد على كل مربع $ا$ واخذ البديل $ج$ كما

صرح به في الشق الاول يكون $\frac{ج}{ج} = \frac{ج}{ج} + \frac{ج}{ج} - ج^2$

$ج \times ج$ ويثبت المطلوب

• (الدعوى الثالثة عشرة النظرية) •

في كل مثلث منفرج الزاوية فضل مربع وتر المنفرجة على مجموع مربعي

الضلعين الباقيين هو قدر ضعف مستطيل ضرب القاعدة فيما بين موقع

العمود وبين تلك المنفرجة

(شكل ١١١) اذا كانت زاوية $ج$ في مثلث $ا ب ج$ منفرجة فمربع

ضلع $ا ب$ الموتر لها اكبر من مجموع مربعي ضلعي $ا ج$ و $ب ج$ المحيطين بها فاذا انزل $ا$ على $ج$ فالتفاضل هو قدر ضعف مستطيل

٢ × ٢ فعل هذا اذا زيد ضعف مستطيل ٢ × ٢
على مجموع مربعي ا ه و ٢ يلزم ان يكون المجموع مساويا لمربع ا ه

$$\text{يعني } \overline{ا ه}^2 = \overline{ا ب}^2 + \overline{ب ه}^2 + ٢ \times ٢$$

فهذه الدعوى لا يمكن وقوع العمود في داخل المثلث فانه لو فرض وقوعه
في الداخل على نقطة ه يلزم ان تكون زاوية ه في مثلث ا ه ه قائمة
ومن كون زاوية ه منفرجة حصل الخلف

فالوقوع العمود خارج المثلث يكون ٢ = ٢ + ٢ وعلى ما ذكر

في الدعوى الثامنة يكون ٢ = ٢ + ٢ + ٢ × ٢
فان زيد على كل من هذين المتساويين مربع ا ه يكون

$$\overline{ا ه}^2 + \overline{ا ه}^2 = \overline{ا ب}^2 + \overline{ب ه}^2 + ٢ \times ٢ + \overline{ا ه}^2$$

$$\text{وان اخذ } \overline{ا ه}^2 \text{ بدلا عن مربعي } \overline{ا ب}^2 + \overline{ب ه}^2 \text{ و } \overline{ا ه}^2 \text{ من } \overline{ا ه}^2 +$$

$$\overline{ا ه}^2 \text{ كافي الدعوى السابقة حيثئذ يكون } \overline{ا ه}^2 = \overline{ا ب}^2 + \overline{ب ه}^2$$

$$\overline{ا ه}^2 + ٢ \times ٢ \text{ وينت المطلوب}$$

• (تبينه) • تساوى مجموع مربعي الضلعين الى ربع الضلع الثالث مختص بالمثلث
القائم الزاوية فقط لانه اذا كانت الزاوية التي بين الضلعين حادة يكون مجموع
مربعيهما اكبر من مربع الضلع المقابل لهما وان كانت منفرجة يكون مجموع
مربعيهما اصغر

• (الدعوى الرابعة عشرة النظرية) •

مجموع ضعف مربع الخط النازل من رأس المثلث الى وسط قاعدته وضعف
مربع نصف القاعدة يساوى مجموع مربعي الضلعين الآخرين

مثلا (شكل ١١٢) اذا انزل خط ا ه من ا رأس مثلث ا ب ه الى

$$\text{وسط قاعدته } ٢ \text{ يكون } \overline{ا ب}^2 + \overline{ا ه}^2 = \overline{ا ه}^2 + ٢ \times ٢$$

لأنه متى انزل عمود $ا$ من نقطة $آ$ على قاعدة $د$ من كون زاوية

$هـ$ من مثلث $ا هـ د$ قائمة يكون $\frac{ا}{د} = \frac{ا هـ}{د هـ} + \frac{ا د}{د هـ}$ -

$د هـ \times د هـ$ كما صرح به في الدعوى (١٢) الثانية عشرة وكذلك

من كون زاوية $هـ$ من مثلث $ا هـ د$ منفرجة يكون $\frac{ا}{د} = \frac{ا هـ}{د هـ}$

$+ \frac{ا د}{د هـ} + د هـ \times د هـ$ كما صرح به في الدعوى (١٣)

الثالثة عشرة المقدمة فإذا اجعت هذه المتساويات ولوخذ أن $د هـ$

و $د هـ$ متساويان لأنهما نصف القاعدة واخذت $هـ$ بدلا من

$د هـ$ يكون $\frac{ا}{د} + \frac{ا د}{د هـ} = \frac{ا هـ}{د هـ} + \frac{ا د}{د هـ} + د هـ \times د هـ$

$+ د هـ \times د هـ - د هـ \times د هـ$ لكن من كون مقدار

$د هـ \times د هـ$ في الجمله زائدا ونافيا فيصذف ويبقى تثبت المطلوب

من ان يكون $\frac{ا}{د} + \frac{ا د}{د هـ} = \frac{ا هـ}{د هـ} + \frac{ا د}{د هـ}$

تتبع في كل شكل متوازي الاضلاع مجموع مربعي قطريه مساو لمجموع

مربعات اضلاعه

لانه (شكل ١١٣) من كون قطري $ا د$ و $د هـ$ في شكل متوازي الاضلاع ان $د هـ$

متناصفين في نقطة $هـ$ (مقالة ١) يكون في مثلث $ا هـ د$ $\frac{ا}{د} + \frac{ا د}{د هـ}$

$= \frac{ا هـ}{د هـ} + \frac{ا د}{د هـ}$ وكذلك في مثلث $ا د هـ$ $\frac{ا د}{د هـ} + \frac{ا هـ}{د هـ}$

$= \frac{ا د}{د هـ} + \frac{ا هـ}{د هـ}$ فإذا اجعت هذه الاشياء المتساوية واخذت $د هـ$

بدلا من $د هـ$ المساوي له يكون $\frac{ا}{د} + \frac{ا د}{د هـ} + \frac{ا د}{د هـ} + \frac{ا هـ}{د هـ}$

$= \frac{ا هـ}{د هـ} + \frac{ا د}{د هـ} + \frac{ا د}{د هـ} + \frac{ا هـ}{د هـ}$ ولكن حيث ان $د هـ$ هو قدر مربع

$د هـ$ او مربع قطر $ا د$ وايضا من كون مقدار $د هـ$ هو مربع

$د هـ$ او مربع قطر $ا د$ وايضا من كون مقدار $د هـ$ هو مربع

$د هـ$ او مربع قطر $ا د$ وايضا من كون مقدار $د هـ$ هو مربع

٢ : ده او مربع ظهر س : ظهر ان مجموع مربعي القطرين يساوي مجموع مربعات اضلاعه وينتث المطلوب

• (الدعوى الخامسة عشرة النظرية) •

(شكل ١١٤) اذا رسم خط ده موازيا لقاعدة مثلث ا ب د فهذا الخط المرسوم يقسم ضلعي ا ب و ا د على التناسب بمعنى تكون ا د : د ر :: ا ب : ب ه : لانه مق وصل خطا ب ه و د ه فالثلاثان الحادان ا ب ه و د ه و د ه فوجدنهما قاعدة ده مشتركة ولوقوع زاويتي الرأس ا ب ه و د ه على الخط الموازي لتلك القاعدة يكون ارتفاعاهما متساويين ولذا يتكافئان وحيث كانت نقطة ه رأس مثلثي ا د ه و ب د ه ولاتحاد الارتفاع فيهما تكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما ا د و ب د

فعلى هذا صار ا د ه : ب د ه :: ا د : ب د وايضا لاشتراك الرأس مثلثي ا د ه و ب د ه في نقطة د ولاتحاد ارتفاعهما تكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتي ا ه و ب ه فتكون ا د ه : ب د ه :: ا ه : ب ه ولكن لتساوي مثلثي ب د ه و د ه و لوجود النسبة المشتركة في هذين التماسين ينتث المطلوب من ان تكون نسبة ا د : ب د :: ا ه : ب ه (نتيجة ١) اذا تناسب المقادير الاربعة فلا تزال متناسبة بطريق التركيب فلذا صار ا د + ب د : د ر :: ا ه + ب ه : د ه :: ا ب : ب ه وكذلك ا ب : ب ه :: ا د : ب د

(نتيجة ٢) (شكل ١١٥) اذا رسمت بين خطي ا ب و د ه المستقيمين ما يراه من خطوط متوازية ا د و ه د و د ح و د ر الخ فهذه الخطوط المتوازية تقطع الخططين المرفوعين على التناسب وتكون ا ه : ه د :: د ر : ر ح :: د ت : ت ح

لانه اذا اخرج خطا α و β على الاستقامة يلتقيان في نقطة γ
 ويكون في مثلث $\alpha\beta\gamma$ هو الحادث خط $\alpha\beta$ موازيا لقاعدته هو
 ولذا صار نسبة $\alpha\beta$: $\alpha\gamma$:: $\beta\gamma$: $\alpha\gamma$ او $\alpha\beta$: $\beta\gamma$:: $\alpha\gamma$: $\alpha\gamma$
 :: $\alpha\beta$: $\beta\gamma$ وكذلك في مثلث $\alpha\beta\gamma$ تكون نسبة
 $\alpha\beta$: $\beta\gamma$:: $\alpha\gamma$: $\alpha\gamma$ او $\alpha\beta$: $\alpha\gamma$:: $\beta\gamma$: $\beta\gamma$ هو
 : $\alpha\gamma$ فنكون نسبة $\alpha\beta$: $\alpha\gamma$ مشتركة في النسامين
 يحصل منهما هذا التناسب اعني نسبة $\alpha\beta$: $\alpha\gamma$:: $\beta\gamma$: $\beta\gamma$ هو
 : $\alpha\gamma$ وبمثل هذا يثبت ان نسبة $\alpha\beta$: $\alpha\gamma$:: $\beta\gamma$: $\beta\gamma$ هو
 برالى آخره

ولذا تظهر ان خطوط $\alpha\beta$ و $\beta\gamma$ الخ المتوازية تقطع خطى $\alpha\gamma$ و $\beta\gamma$
 المستقيمين على التناسب

(الدعوى السادسة عشر النظرية)

(شكل ١١٦) وبالعكس اذا قطع خط $\alpha\beta$ المستقيم خطى $\alpha\gamma$
 و $\beta\gamma$ على التناسب وكانت نسبة $\alpha\beta$: $\alpha\gamma$:: $\beta\gamma$: $\beta\gamma$ هو
 نقط $\alpha\beta$ يكون موازيا لقاعدة $\alpha\beta$
 لانه ان لم يكن خط $\alpha\beta$ موازيا لقاعدة $\alpha\beta$ وفرض ان خط $\alpha\beta$ موازيا
 لها فعلى ما صرح به في الدعوى التي تضمنت تكون نسبة $\alpha\beta$: $\alpha\gamma$:: $\beta\gamma$: $\beta\gamma$
 ا $\alpha\beta$: $\beta\gamma$:: $\alpha\gamma$: $\alpha\gamma$ ولكن قد فرض ان نسبة $\alpha\beta$: $\alpha\gamma$:: $\beta\gamma$: $\beta\gamma$ هو
 فنكون نسبة $\alpha\beta$: $\alpha\gamma$: $\beta\gamma$ مشتركة في هذين النسامين يحصل منهما
 هذا التناسب وهوان تكون نسبة $\alpha\beta$: $\alpha\gamma$:: $\beta\gamma$: $\beta\gamma$ هو
 وهذا غير ممكن لان في هذا التناسب يلزم ان يكون قاعى $\alpha\beta$ اكبر من قاعى
 $\alpha\beta$ كما ان مقدم $\alpha\beta$ اكبر من مقدم $\alpha\beta$ وحيث قد يلزم ان يكون
 الشئ الاعظم اصغر مما دونه وهذا خلف ومن ثمة لا يرسم خط من نقطة
 موازيا لقاعدة $\alpha\beta$ الا خط $\alpha\beta$ وبه ثبت المطلوب من ان يكون خط $\alpha\beta$
 هو الموازى لتلك القاعدة

• (تنبيه) • إذا كانت نسبة $ا : ب :: ا : ب$: أه كذلك يكون
خط $د ه$ موازياً للقاعدة $ر$ لان هذا التناسب لا يزال متناسباً
بطريقة الفضل بمعنى تكون نسبة $ا - ب :: ا - ب$: أه : $ا - ب$:
أه : أه او نسبة $ب : ا :: ب : ا$: أه فعلى ما ثبت آتياً
ظهر ان يكون خط $د ه$ ايضاً موازياً للقاعدة $ر$

• (الدعوى السابعة عشر النظرية) •

(شكل ١١٧) اي مثلث اذا انصفت زاويته $ا$ بخط $ا ب$ فهو ذا الخط
يقسم قاعدة $ر$ الى قسمين $س د$ و $د ر$ تكون النسبة بينهما
كالنسبة بين ضلعي $ا ب$ و $ا ج$ المحيطين بها بمعنى تكون نسبة
 $س : د :: ا : ب$

لانه اذا رسمت $ه$ من نقطة $ه$ موازياً لخط $ا ب$ و امتد ضلع $ا$
حتى يقطع هذا الموازى في نقطة $ه$ نخط $ا ب$ في مثلث $ر ه ج$
الحادث يكون موازياً لقاعدته $ر ه$ ومن ثمة حصل هذا التناسب بمعنى
نسبة $س : د :: ا : ب$ ولكن من توازى خطى $ا ب$
و $ه ج$ وقطعهما بخط $ا ج$ تكون زاوية $د ا ج$ مساوية لزاوية
 $ا ه ج$ انظر (مقالة ١) وكذلك من كون زاويتي $ا ه ج$ و $س ا ج$
خارجية وداخلية ايضاً يكونان متساويين وبما فرض ان زاويتي $د ا ج$
و $س ا ج$ متساويتان تكون زاوية $ا ه ج$ ايضاً مساوية لزاوية $ا ه ج$
ولذا يكون $ا ه = ا ج$ انظر (مقالة ١) فان وضع في التناسب الذى ذكر
خط $ا ج$ بدلا من مساويه $ا ه$ يثبت المطلوب من ان تكون نسبة $س : د :: ا : ب$

• (الدعوى الثامنة عشر النظرية) •

المثلثان المتساويان الزوايا تكون اضلاعهما المتناظرة متناسبة ويكونان
متشابهين

(شكل ١١٩) مثلاً اذا كانت الزوايا المتناظرة في مثلثي $ا ب ج$ و

د هـ بمعنى زاوية د ا ح = د هـ و ا ر = د هـ
 و ا ر = د هـ تكون الاضلاع المتناظرة وهي المحيط بالزوايا
 المتساوية متناسبة بمعنى تكون نسبة ر د : د هـ :: ا ر :
 د هـ :: ا ح : د هـ

فاذا وضع ر د و د هـ ضلعاهما المتناظران على استقامة واحدة وامد
 ضلعا ا ر و د هـ حتى يلتصقا في نقطة و فمن كون خط د هـ
 مستقيما واحدا وزاوية د ح ا مساوية لزاوية د هـ د الداخلة والخارجة
 فيكون خط ا ح موازيا لخط د هـ أو د هـ انظر (مقالة ١) وكذلك من
 كون زاوية ا ر د مساوية لزاوية د هـ د يكون خط ا ت أو ر و موازيا
 لخط د هـ ولذا صار شكل ا د ر و متوازي الاضلاع

فمن كون خط ا ح في مثلث ر هـ د موازيا لقاعدة د هـ تكون نسبة
 ر د : د هـ :: ا ر : ا ح فاذا وضع في هذا التناسب خط
 د ر بدلا من مساويه ا د تكون نسبة ر د : د هـ :: ا ر : د ر
 وايضا اذا فرض ر و قاعدة في مثلث ر هـ د يكون خط د ر موازيا
 لاه من ثمة حدث هذا التناسب ر د : د هـ :: د ر : د هـ :
 د هـ فان وضع ا د بدلا من مساويه د ر تكون نسبة ر د :
 د هـ :: ا د : د هـ فلاشتر النسبة ر د : د هـ ::
 في هذا التناسب والتناسب الذي سلف صارت نسبة ا د : د هـ ::
 ا ر : د هـ لانه اذا كان كل من النسبتين مساويا لنسبة واحدة فتكونان
 متساويتين وصارت اضلاع مثلثي ر ا د و د هـ المتناظرة
 متناسبة فعلى ما ذكر في الحد الثاني وهو انه اذا كانت اضلاع الشكلي
 المتناظرة متناسبة وزواياهما المتناظرة متساوية يكونان متشابهين من اجل
 ذلك ثبت المطلوب من ان يكون مثلثا ر د ا و د هـ المتساوي الزوايا
 متشابهين

نتيجة في تشابه المثلثين يكمل بك تساوي مثلثي الزوايا المتناظرة ثلاثة متى تساوى

مثنى الزوايا في المثلثين تكون الزاوية الثالثة من ذين المثلثين متساويتين ويصير
المثلثان متساويي الزوايا

• (تنبيه) • اعلم ان الاضلاع الموتره وهى المقابلة للزوايا المتساوية فى المثلثات
المتشابهة تسمى اضلاع المتناظرة ففى كانت زاوية α مساوية لزاوية β وهى
يكون ضلع α يناظر ضلع β وكذلك يكون ضلع α و β
متناظرين لانهم ماموران لزاويتي α و β المتساويتين ومضى علم
تناظر الاضلاع يحدث هذا التناسب اعنى كون نسبة α : β :: γ : δ
: ϵ :: ζ : η

• (الدعوى التاسعة عشر النظرية) •

مضى تناسبت الاضلاع المتناظرة فى مثلثين يصيران متساويي الزوايا ومتشابهين
(شكل ١٢٠) مثلا اذا كان فى مثنى α و β وهى نسبة
 α : β :: γ : δ :: ϵ : ζ :: η : θ متساوي
فهيما الزوايا المتناظرة يعنى زاوية α = γ و β = δ
و γ = ϵ و فاذا انشئت زاوية α وهى من نقطة α مساوية
لزاوية β وزاوية γ وهى من نقطة β مساوية لزاوية δ فزاوية
 α فى مثلث α تكون مساوية لزاوية β ويصير مثلثا α
و β متساويي الزوايا كما مر فى الدعوى التى تقدمت وتكون نسبة
 α : β :: γ : δ :: ϵ : ζ :: η : θ ولكن فرض ان تكون α : β :: γ : δ
: ϵ :: ζ : η :: θ : ι فحينئذ التساوى الحدود الثلاثة فى هذين
التناسيبين يلزم ان يكون الحد الرابع δ = ϵ وهى وايضا كما مر
فى الدعوى المذكورة ~~تكون~~ نسبة α : β :: γ : δ :: ϵ : ζ :: η : θ
: ι وكذلك فرض ان نسبة α : β :: γ : δ :: ϵ : ζ :: η : θ :
 ι وتساوى الحدود الثلاثة ايضا يكون δ = ϵ فعلى هذا صارت
اضلاع مثنى α و β وهى الثلاثة المتناظرة متساوية ولكن
ان كون مثلث α و β انشئت زواياه مساوية لزوايا مثلث α يكون

مثلاً وهو α متساوي الزوايا ويثبت المطلوب
 • (تنبيه ١) • فعلى ما ظهر من اثبات الدعوتين الأخيرتين أن من تساوى الزوايا
 في المثلثات يقتضى تناسب الاضلاع ومن تناسب الاضلاع يقتضى تساوى
 الزوايا وكل واحد من هذين الشرطين كافٍ لتحقيق التشابه بين المثلثات
 الا ان هذه الخصوصية ليست في الاشكال ذات الاضلاع الزائدة على الثلاثة لانه
 لو نظر الى ذى اربعة اضلاع لمكان يمكن فيه تغير تناسب الاضلاع بدون تبديل
 الزوايا وتغير الزوايا بدون تبديل الاضلاع فلذا ظهر ان من تناسب الاضلاع
 لم يقتض تساوى الزوايا وبالعكس يعنى من تساوى الزوايا لم يقتض تناسب
 الاضلاع الا في المثلث فقط مثلاً على ما يرى من هذا

(الشكل ١٢١) انه اذا رسم α هو موازيا لخط β ضلع ذى اربعة اضلاع
 تكون زوايا شكل α هو ذى اربعة اضلاع مساوية لزوايا شكل β ذى
 اربعة اضلاع الاخر ولكن تغير تناسب الاضلاع ممكن وكذا يمكن تقارب
 أو تباعد نقطتي α و β بدون تغير تناسب اضلاع ذى اربعة اضلاع المذكور

اعني α و β و γ و δ وهذا يقتضى عدم مساواة الزوايا
 (تنبيه ٢) لوجود المناسبة والتعلق بين هاتين الدعوتين الأخيرتين فكأنهما
 دعوى واحدة فاذا ضمت هذه الدعوى الى دعوى المثلث القائم الزاوية المسماة
 بشكل العروس فتكون هاتان الدعوتان اشهر الدعوى واعظمها حيث انها
 كثيرة القوائد في علم الهندسة وانها كافية للدعوى العملية في حلها واثباتها
 وتطبيقها بالعمليات

لانه قد علم ان كل شكل قد يقسم الى مثلثات وكل مثلث يقسم الى مثلثين قائمي
 الزاوية والمعنى أن هذه الخصائص تم جميع الاشكال

• (الدعوى العشرون النظرية) •

يتشابه المثلثان اذا تساوى منهما آحاد الزوايا وكانت الاضلاع المحيطة بماتين
 الزاويتين متناسبة

(شكل ١٢٢) مثلاً اذا كان في مثلثي α و β هو زاوية ١

= زاوية د ونسبة ا - : د ه :: ا ج : د و يكونان
متشابهين

فاذا اخذ ا د مساويا لاضلع د ه ونسب د ح من نقطة د موازيا للقاعدة
ا - تكون زاوية ا د ح مساوية لزاوية ا - ج انظر (مقالة ١)
ويكون مثلثا ا د ح و ا - متساوي الزوايا وتكون نسبة ا -
: ا د :: ا ج : ا ح

وله كن فرض ان نسبة ا - : د ه :: ا ج : د و وليكون ا د
= د ه بالعمل صارت حدود هذين التماسين الثلاثة متساوية فلذا
يكون الحدان الرابعان متساويين اعني ا ح = د و ولتساوي الضلعين
والزاوية التي بينهما حال الضلعين الاخيرين والزاوية التي بينهما في مثلثي ا د ح و
د ه و يكونان متساويين ولكن من كون مثلث ا د ح مشابها للمثلث
ا - ج يكون مثلث د ه و المساوي له مشابها للمثلث ا - ج ويثبت
المطلوب

(الدعوى الحادية والعشرون النظرية)

في كل مثلثين اذا كانت الاضلاع المتناظرة متوازية او متعامدة يكون المثلثان
متشابهين

(شكل ١٢٣) اولاً لانه متى كان ضلع ا - موازيا لاضلع د ه وضلع
ا - ج موازيا لاضلع د ه في مثلثي ا - ج و د ه و تكون زاوية
ا - ج مساوية لزاوية د ه و انظر (مقالة ١) ومتى كان ضلع ا ج
موازيا لاضلع د ه تكون زاوية ا - ج مساوية لزاوية د ه فلذا
تبقى زاوية ا - ج مساوية لزاوية د ه و لتساوي الزوايا في مثلثي
ا - ج و د ه يكونان متشابهين

ثانياً (شكل ١٢٤) اذا كان في مثلثي ا - ج و د ه ضلع د ه
عموداً على ا - و د و على ا ج ومن كون زاويتي ج و ط في شكل
ذي اربعة اضلاع ا ط د ج قائمتين بالفرض وفوايا ذي اربعة اضلاع

مساوية لاربع قوائم انظر (مقالة ١) يكون الباقي وهو مجموع زوايق طاح
و طوح مساويا للقائتين ولكون مجموع زوايق هـ د و طوح
المتجاورتين مساويا للقائتين تكون زاوية هـ د و مساوية لزاوية طاح
او - ا ح اذا طرح طوح المشتركة من المتساويين وايضا على ما صرح
به يثبت من كون الضلع الثالث هـ د عمودا على - ح ان تكون زاوية
د هـ مساوية لزاوية ح و زاوية د هـ و مساوية لزاوية - ح كما صرح به
وبصير المثلثان المتعامدا الاضلاع متساوي الزوايا ومتشابهين

تبينه - حين تتوازي الاضلاع تكون متناظرة ومتى كانت عمادا فذلك تكون
متناظرة فعلى ما يرى من شكل مائة رابعة وعشرين ان ضلع د هـ متناظر
لضلع ا - ح وضلع د و متناظر لـ ا ح وضلع ا د وضلع د هـ متناظر لـ ا ح
ومتى تعامدت الاضلاع فتارة يكون وضع المثلثين المذكورين ليس كما يرى
من (شكل ١٢٤) وان وجد على وضع آخر فثبت ايضا بتساوي الزوايا
سواء كان بالشكل ذي اربعة اضلاع مثل ا ط د ح الذي له قائمتان
او بتقدير المثلثين القائمتي الزاوية ذوى الرؤس المتقابلة ولاجل سمولة ذلك يرسم
في مثلث ا - ح مثلث د هـ و تكون اضلاعه موازية لاضلاع المثلث
المقدر بمثلث ا - ح فاثبات هذه الطريقة هو كما ثبت في (شكل ١٢٤)
ولا يحتاج الى اثبات اخر

• (الدعوى الثانية والعشرون النظرية) •

(شكل ١٢٥) اذا وصل من راس مثلث الى قاعدته خطوط مستقيمة
او و او خ قدر ما يراد فهذه الخطوط الموصولة تقسم قاعدة - ح
وعارازها فهو د هـ على التناسب يعنى ان تكون نسبة د هـ : ح و
:: ل ك : د و :: ك ط : د ح خ

لا فـ من كون خط د ل موازيا لخط - ح يكون مثلثا ا د ل
و ا - ح متساوي الزوايا ومتشابهين وبهذا نجد ان هذه المتناسبة
اعنى د ل : ح و :: ا ل : ا ح وايضا تتوازي ل ك و و

في المثلث الاكبر ومن ثمة حصل هذا التناسب $د : ا :: ا : ر$ و $د : ر :: ا : ا$ فلذا ظهر
ان كل واحد من ضلعي $ا - ر$ و $ا - د$ وسط متناسب بين وتر القائمة والقسم
المجاورة

الحالة الثالثة من تشابه مثلثي $ا - د$ و $ا - د$ تصير اضلاعهما المتناظرة
متناسبة ويظهر هذا التناسب أعني نسبة $د : ا :: ا : ر$ و $د : ر :: ا : ا$:
 $د$ ومن ثمة ثبت المطلوب وهو ان يكون عمود $ا - د$ وسطا متناسبا بين
قسمي $د - ر$ و $د - ا$ جزأي وتر القائمة

تنبيه حيث ان مستطيل الطرفين يساوي مستطيل الوطين في تناسب $د - ر$

$$\frac{د}{ر} :: ا : ر \text{ يكون } ا = \frac{د \times ر}{ر} = د \times ر$$

وأيا يكون $ا = \frac{د}{ر} \times د$ فاذا جعت هذه الاشياء المتساوية

$$\text{يصير } ا = \frac{د}{ر} + ا = \frac{د}{ر} + د \times ر = د \times ر + د \times ر \text{ ولا تخاد}$$

الحدا الثاني في كل من هذين المستطيلين صار $(د + ر) \times د$

$$= ا + \frac{د}{ر} \text{ فاذا أخذ } د \text{ بدلا عن حدى } د + د$$

$$\text{يصير } د - ر \times د = \frac{د}{ر} + ا = \frac{د}{ر} \text{ ومن ثمة ظهر ان}$$

مربع $د - ر$ وتر القائمة مساو لمجموع مربعي $ا - ر$ و $ا - د$ الضلعين الآخرين

قد ذكر فيما تقدم ان مربع وتر القائمة في المثلث القائم الزاوية مساو لمجموع

مربعي الضلعين الباقيين وقد ثبت ذلك في هذا المثل على وجه آخر ولكن في هذا

الوجه فرق كبير عن الوجه السابق ومن هذا يقال حيث ان قضية

مربع وتر القائمة ناشئة عن تناسب اضلاع المثلثات المتشابهة صارت الدعاوى

التي هي أساس علم الهندسة قليلة العدد حتى صارت ككائنات ماعبرة
عن مثلثات متناسبة الاضلاع متساوية الزوايا فعلى ما يرى من هذا المثال

ان مانع من الدعوى أو الدعاوى وافق ما قد صدقت عليه دعوى مثبتة أخرى

وذلك دليل على ان ابراهيم الهندسة قطعية ولو وقع في بعض الاثبات أدنى
سهو لكان محسوسا ولو بعد دعاوى كثيرة حيث ان سائر ابراهيم الهندسة مبينة
على القضية البدئية التي تفهم الخضم وتجبره على التسليم
نتيجة (شكل ١٢٧) اذا وصل وتر a و a من نقطة آ الواقعة
على المحيط الى نهايتي قطر c فزاوية a من مثلث a c c نصير
قائمة فلذا عمود a يكون وسطا متناسبا بين c c و c c
وتر a بين قطر c وبين سهم c المجاور له فيصير $a = \frac{c}{2}$ c
 \times c وحيث ان وتر a وسط متناسب بين قطر c وبين سهم c
 c المجاور له يكون $a^2 = c \times c$ فيحصل من كلتا المعادلتين
تناسب نحو $a : \frac{c}{2} :: \frac{c}{2} : c$ واذ اقدوم ربعا
 $\frac{a}{c} = \frac{c}{2a}$ نصير $a : c :: \frac{c}{2a} : \frac{c}{2}$ وكذلك
 $\frac{a}{c} : \frac{c}{2a} :: c : \frac{c}{2}$ وتناسب هذه المربعات سواء كان
يعضها أو وتر القائمة قد سبق ذكره في النتيجة الثالثة والرابعة من شكل العروس
فتأمل

• (الدعوى الرابعة والعشرون النظرية) •

اذا تساوت زاويتان من المثلثين تكون النسبة بينهما كالنسبة بين مستطيلي
الاضلاع المحيطة بالزاويتين المتساويتين
مثلا (شكل ١٢٨) نسبة مثلث a c الى مثلث a c a c التساوي
الزاوية كنسبة مستطيل $a \times c$ الى مستطيل $a \times c$ a
لانه اذا وصل c فنكون رأس c مشتركة في مثلثي a c
و a c واتحد اارتفاعهما تكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما
 a و a يعني تكون a c : a c :: a : a
وأبضاهن اتحاد الارتفاع في مثلثي a c و a c تكون نسبة

ا - ر : ا - ه :: ا : ا ه

فاذا ضربت حدود هذين التناسيب على الترتيب تكون ا - ر ه \times ا - ر
: ا ه \times ا - ر :: ا - ر \times ا : ا ه وحيث
لاخلل في مقدار هذا التناسب اذا حذف منه المضروب فيه المشترك
وهو ا - ر ه ثبت المطلوب وهو ان ا - ر : ا ه :: ا - ر \times
ا : ا ه \times ا ه

نتيجة اذا كان مستطيل ا - ر \times ا ه يساوى مستطيل ا ه \times ا ه
يكون المثلثان المذكوران متكافئين او اذا كانت نسبة ا - ر : ا ه ::
ا ه : ا ه يكون المثلثان المرقومان متكافئين وخط د ه يوازي
خط ر ه

(الدعوى الخامسة والعشرون النظرية)

النسبة بين المثلثين المتشابهين كالنسبة بين مربعي ضلعيهما المتناظرين
(شكل ١٢٢) لان زاوية ا مساوية لزاوية د في مثلثي ا - ر ه
و د ه و وكذا زاوية ر مساوية لزاوية ه فهذه تكون نسبة
ا - ر : د ه :: ا - ر \times ا ه : د ه \times د ه كما صرح به
في الدعوى التي تقدمت وايضا بنسبة المثلثين تكون نسبة ا - ر : د ه
:: ا : د فاذا ضربت حدود هذا التناسب على الترتيب في حدود
تناسب ا ه : د ه :: ا : د الحاصل من نسبة واحدة هذا
في حذحصل تناسب ا - ر \times ا ه : د ه \times د ه :: ا : د : $\frac{ا}{د}$
فوجود النسبة المشتركة في هذا التناسب وفي التناسب الذي تقدم يكون
ا - ر : د ه :: ا ه : د فعمل ان نسبة مثلثي ا - ر ه و د ه
المتشابهين كنسبة مربعي ضلعيهما ا و د ه او كنسبة مربعي ضلعيهما
التناظرين الاخرين وبهذا ثبت المطلوب

(الدعوى السادسة والعشرون النظرية)

كثيرا الاضلاع المتشابهان من كان من مثلثات متشابهة متناظرة متعددة العدد
متماثلة الوضع

(شكل ١٢٩) لانه اذا وصل وتر $ا د$ و $ا ه$ من $ا$ زاوية كثير
الاضلاع $ا - ح د ه$ و وتر $د ح$ و $و ط$ من $د$ نظيرة $ا$
من كثير الاضلاع $د ر ح$ ط $ه$ فمن تشابه الشكلين نصير زاوية $ا - ح$
مساوية لزاوية $د ر ح$ نظيرتها (حد ٢) وماعدا هذا يكون ضلعا $ا -$
و $د$ مناسبين لضلعي $د ر$ و $د ح$ ومن ثمة صارت نسبة $ا -$
: $د ر :: د -$: $د ح$ ويكون مثلثا $ا د ر$ و $د ر ح$ متشابهين
لان اتحاد زاويتيهم مع تناسب الاضلاع المحيطة بهما فتكون زاوية
 $د ر ا$ مساوية لزاوية $د ر ح$ و فاذا طرحنا هاتان المتساويتان من زاويتي
 $د ر ا$ و $د ر ح$ ط المتساويتين تبقى زاويتي $ا د ر$ و $د ح ط$
متساويتين ولتشابه مثلثي $ا د ر$ و $د ر ح$ تكون نسبة $ا د$:
 $د ح :: د -$: $د ر$ ومن تشابه كثير الاضلاع تكون ايضا نسبة
 $د -$: $د ر :: د ح$: $ط$ ولاشتراك النسبة في هذين التناسلين
تكون نسبة $ا د$: $د ح :: د ر$: $ط$ وقد ثبت تساوي
زاويتي $ا د ر$ و $د ح ط$ فصار مثلثا $ا د ر$ و $د ح ط$ متشابهين
لان اتحاد زاويتيهم مع تناسب الاضلاع المحيطة بهما متحقق وثبت تشابه جميع
المثلثات المركب منها كثيرا الاضلاع المقروضان نظرا الى عدة اضلاعها كما
صرح به ومن ثمة ظهر ان يكون كثيرا الاضلاع المتشابهان من كين من مثلثات
متشابهة متعددة في العدد ومتماثلة في الوضع وبه ثبت المطلوب

تنبيه ايضا عكس هذه صحيح اعني ان كل كثير الاضلاع اذا تر كبا من مثلثات
متشابهة متعددة العدد متماثلة الوضع بصيران متشابهين لان تشابه المثلثات
يجب ان تكون زاوية $ا د ر = د ر ح$ و $د ح و$ و $ا د$
 $= د ح ط$ ولا صارت $د ر = د ح ط$ وايضا تكون زاوية $د ر ه$
 $= ح ط ه$ الخ وما سوى هذا تكون نسبة $ا -$: $د ر :: د -$

: د ح :: ١ : ٢ : د ح :: ٢ : ٤ : ح ط الخ وحيث ثبت تساوى
زوايا كثيرى الاضلاع مع تناسب الاضلاع فهما متشابهان
* (الدعوى السابعة والعشرون النظرية) *

النسبة بين محيطى كثيرى الاضلاع المتشابهين كالنسبة بين اضلاعهما
المتناظرة والنسبة بين سطوحهما كالنسبة بين مربعات اضلاعهما المتناظرة
(شكل ١٢٩) أولامن تشابه الشكلين تكون نسبة ا - ر : د ح ::
ر - ح : د ح :: ٢ : ٤ : ح ط الخ وحيث كانت نسبة مجموع
المقدمات الى مجموع التوالى كنسبة مقدم الى تاليه فعلى هذا ظهور ان نسبة
مجموع المقدمات اعنى ا - ر + ر - ح + ح ط الخ أى محيط الشكل
الاول الى مجموع التوالى اعنى د ح + ح ط الخ أى محيط
الشكل الثانى كنسبة أحد المقدمات الى أحد التوالى يعنى ضلع ا - ر الى
تظيره د ح

ثانياً من تشابه مثلثى ا - ر ح و د ح تكون نسبة ا - ر : د ح
:: ا - ر : د ح $\frac{ا}{د}$ ومن تشابه مثلثى ا - ر ح و ح ط كذلك تكون
ا - ر : د ح :: ا - ر : د ح $\frac{ا}{د}$ ولاشتراك ا - ر : د ح فى هذين
التناسيبين صارت نسبة

ا - ر : د ح :: ا - ر : د ح و بمثل هذا يثبت كون نسبة
ا - ر : د ح :: ا - ر : د ح و ط ه فعلى هذا يحكم بأن تكون
جميع المثلثات متناسبة لوجود النسب المتساوية فيها على التوالى
ومن كون نسبة مجموع المقدمات التى هى ا - ر + ر - ح +
ا - ر ه أو مساحة كثير الاضلاع ا - ر ح د ه الى مجموع التوالى
أعنى د ح + ح ط + ط ه أو مساحة كثير الاضلاع
د ح ط ه كنسبة ا - ر ح أحد المقدمات الى تاليه وهو د ح
أو كنسبة ا - ر الى د ح $\frac{ا}{د}$ من أجل ذلك ظهر ان نسبة سطوح

كثيرى الاضلاع المتشابهين \llcorner كنسبة مربعات اضلاعهما المتناظرة
ويثبت المطلوب

نتيجة اذا انشئت ثلاثة أشكال كثيرة الاضلاع متشابهة بأن تكون اضلاعها
المتناظرة مساوية لثلاثة اضلاع مثلث قائم الزاوية فمساحة الشكل المرسوم على
وتر القائمة تكون مساوية لمجموع مساحة الاثنين الآخرين لانه يلزم من كون
نسبة الثلاثة أشكال المرسومة \llcorner كنسبة مربعات اضلاعهما المتناظرة
ومن حيث ان في المثلث القائم الزاوية مربع الوتر مساوياً لمجموع مربعي الضلعين
الآخرين فعلى مقتضى تناسب مساحة مجموع الشكلين تكون مساوية لمساحة
الشكل الآخر المتشاكل على الوتر

• (الدعوى الثامنة والعشرون النظرية) •

• (شكل ١٣٠) اجزاء وترى ا - و د المتقاطعين داخل الدائرة تكون
متناسبة تناسباً مقلوباً وهوان تكون ا ه : د ه :: ح ه : ه ه
لانه اذا وصل د - و ا فوجود زاوية ه مشتركة في مثلثي ا ح ه
و - ه د الحادتين وتساوى زاويتي ا و د لوقوعهما في قطعة
واحدة وكذا زاويتي د و ح يهكون المثلثان المرقومان متشابهين
وتناسب الاضلاع المتناظرة منهما علم ان نسبة ا ه : د ه :: ح ه : ه ه
ويثبت المطلوب

• (الدعوى التاسعة والعشرون النظرية) •

• (شكل ١٣١) اذا عين قوس د - ه المقعر وصل خطى ه - و د ه
القاطعين المتلاقين في نقطة ه الواقعة خارج الدائرة فالقاطعان
الكاملان المذكوران يكونان مناسبتين لقسميهما الخارجيتين تناسباً مقلوباً وهوان
ان تكون نسبة ه - د : ه ه :: د ه : ه ا

لانه اذا وصل ا ح و د - ه فلاشك في ان زاوية ه في مثلثي ه ا ح و
ه د ه الحادتين ووقوع زاويتي د و ح في قطعة واحدة فتكونان
متساويتين فيتشابه المثلثان وهككون اضلاعهما المتناظرة متناسبة

فلذا صارت نسبة هـ : هـ : هـ :: هـ : هـ : هـ وثبت المطاوع
 (نتيجة) من تساوى مستطيل الطرفين بمسـطيل الوسطين يكون مستطيل
 احد القاطعين يجزئه الخارج مساويا لمستطيل القاطع الاخر يجزئه الخارج عن
 الدائرة اعني ان مستطيل هـ : هـ : هـ يساوى مستطيل هـ : هـ : هـ
 تنبيه اعلم ان هذه الدعوى ينهـا وبين الدعوى التي تقدمت مناسبة وموافقة
 وانما تختلف تلك الدعوى بتقاطع وترى اـ و جـ داخل الدائرة بخلاف
 هذه فان وترها يتقاطع خارج الدائرة
 وأما الدعوى الاربعة فكانت خاصا وصورة خاصة لهذه الدعوى
 * (الدعوى الثلاثون النظرية) *

(شكل ١٣٢) اذا وصل من نقطة هـ الواقعة خارج الدائرة خطا اـ هـ
 المماس و جـ هـ القاطع فالخط المماس المذكور يكون وسطا متناسبا بين
 الخط القاطع وجزئه الخارج اعني ان تكون هـ : هـ : هـ :: هـ : هـ : هـ
 :

$$\text{فعلى هذا تكون } هـ : هـ : هـ = \frac{هـ^2}{هـ} \times هـ$$

لانه اذا وصل اـ و جـ ففي مثلثي هـ اـ و هـ اـ زاوية هـ
 المشتركة وزاوية هـ اـ الحاصلة من وتر وخط مماس يكون نصف
 قوس اـ جـ معيارا لها ومن كون القوس المذكور ايضا معيارا لزاوية
 جـ هـ تكون زاوية هـ اـ مساوية لزاوية جـ ويكون المثلثان
 المذكوران متشابهين ومن ثمة كانت نسبة هـ : هـ : هـ :: هـ : هـ : هـ ::

$$هـ : هـ : هـ :: هـ : هـ : هـ = \frac{هـ^2}{هـ} \times هـ \text{ ويثبت المطاوع}$$

* (الدعوى الحادية والثلاثون النظرية) *

(شكل ١٣٣) في أى مثلث كثلث اـ جـ اذا نصفت زاويته اـ بخط اـ د
 مستطيل اـ و اـ الضلعين المحيطين بها مساويا لمستطيل قسـيـ رـ
 و دـ ومربع اـ النصف * لانه اذا رسم محيط دائرة مارزايا مثلث

ا ح و مدخط ا ح حتى انتهى الى محيط الدائرة ووصل ه ح
 فثلث ر ا د الحالتين شاه مثلك ه ا ح * لانه يلزم من كون زاوية
 ر ا د مساوية لزاوية ه ا ح كما فرض وزاوية ر و ه متساويتين
 لوقوعهما في قطعة واحدة أن يكون المثلثان المذكوران متشابهين وتكون
 اضلاعهما المتناظرة متناسبة اعني ان نسبة ا ر : ا ه
 :: ا د : ا ح وبهذا يكون ا ر × ا ح = ا ه × ا د
 ا د لكن حيث ان ا ه = ا د + د ه اذا ضرب كل من
 هذين المتساويين في خط ا د يكون ا ه × ا د = ا د × ا د + د ه × ا د
 د ه لكن من كون ا د × د ه = ر د × د ه يكون
 ر ا × ا د = ا د × د ه + ر د × د ه ويثبت المطلوب

(الدعوى الثانية والثلاثون النظرية) *

(شكل ١٣٤) مستطيل هود ا د النازل من رأس مثلث على قاعدته
 د ه الذي هو قطر الدائرة المرسومة على المثلث المذكور مساو
 لمستطيل ضلعي ا ر و ا ح المحيطين بزاوية الرأس
 لانه اذا وصل ا ه فقي أحد مثلتي ا ر د و ا ح د زاوية ا مساوية
 لزاوية د في الاخر لكونهما قائمتين وزاويتا ر و ه متساويتان لوقوعهما
 في قطعة واحدة فعلى هذا يكون المثلثان المذكوران متشابهين فظهر ان نسبة
 ا ر : ا ح :: ا د : ا د ويكون ا ر × ا ح = ا د × ا د
 ا د ويثبت المطلوب

نتيجة اذا ضرب كل من هذين المقدارين المتساويين في ر ح بعينه يتسبب
 ا ر × ا ح × ر ح = ا د × ا د × ر ح لكن حيث ان
 مستطيل ا د × ر ح مساو ضعف مساحة ذلك المثلث فحاصل
 ضرب الاضلاع الثلاثة من مثلث يساوي حاصل ضرب ضعف سطحه في قطر
 الدائرة المرسومة عليه وما سبق من ضرب الثلاثة خطوط في بعض يدل على

مساحة جسم فحينئذ تصور تلك الخطوط كالأعداد الحسابية كالأصغر
تبيينه ثبت إنه مساحة أى مثلث تساوى حاصل ضرب نصف قطر
الدائرة المرسومة داخل ذلك المثلث بجميع أضلاعه اعني محيطه
لان في (شكل ٨٧) رؤس مثلثات $أ ب ج$ و $أ ب د$ و $أ ج د$ مشتركة
في نقطة $ح$ وحيث ان نصف قطر الدائرة المرسومة داخل مثلثات $أ ب ج$ هو
ارتفاع مشترك لتلك المثلثات يعلم ان مجموع مساحات المثلثات المذكورة يساوى
حاصل ضرب قواعد $أ ب$ و $أ ج$ و $أ د$ في ربع قطر $ح د$ فبين ان
مساحة مثلث $أ ب ج$ تساوى حاصل ضرب مجموع أضلاعه الثلاثة في ربع
قطر الدائرة المرسومة داخل ذلك المثلث

• (الدعوى الثالثة والثلاثون النظرية) •

(شكل ١٢٥) كل شكل ذي أربعة أضلاع مرسوم داخل الدائرة مثل
 $أ ب ج د$ منسطين قطريه $أ ج$ و $ب د$ يساوى مجموع مستطيلي
الأضلاع المتقابلة يعنى يكون $أ ج \times ب د = أ ب \times ج د + أ د \times ب ج$

لانه اذا أخذ $ح$ مساويا لقوس $أ د$ ووصل $هـ$ يقطع قطر $أ ج$
في نقطة $و$ فمثلا $ب و ج$ و $أ د$ الحاد ثمان بصيران متساويين حيث ان
نصف كل من قوسى $أ د$ و $هـ ج$ المتساويين هو مقدار زاويتى $أ د و ج$ و $ب و ج$
فهما متساويتان ولوقوع كل من زاويتى $أ د$ و $ب و ج$ في قطعة
 $أ هـ$ تكونان أيضا متساويتين فعلى هذا صار مثلثا $أ ب د$ و $أ ج د$
متساويين لتساوى الزوايا المتناظرة فيهما منى وتكون نسبة $أ د : ب و ج$
:: $ب د : ب و ج$ وبهذا صار $أ د \times ب و ج = ب د \times ب و ج$
وأيضاً مثلث $أ د و$ يشابه مثلث $ب د و$ لانه اذا زيد $د هـ$ على كل من
قوسى $أ د$ و $هـ ج$ المتساويين يصير قوس $أ هـ$ و قوس $ب د$
متساويين وحينئذ زاوية $أ د و$ تساوى $ب د و$ ولوقوع زاويتى $أ د و$
و $ب د و$ في قطعة واحدة تكونان متساويتين فلذا تشابه مثلثا $أ د و$

د فبناء على ذلك علم ان النسبة بين قطري ذى الاربعة الاضلاع كالنسبة بين المستطيلين الحادئين من الضلعين المتعلى النهايتين وكل من هاتين القضيتين مستعمل في استخراج الاقطار اذا كانت الاضلاع معلومة

• (الدعوى الرابعة والثلاثون النظرية) •

(شكل ١٣٦) اذا كانت نقطة د واقعة على نصف قطر ا د داخل الدائرة ونقطة ه واقعة على استقامته خارجها وكانت نسبة د د : ا :
 ا : د ه فكل خطين مستقيمين موصولين بنقطة م و م ه من م أى نقطة واقعة على ذلك المحيط الى نقطتي د و ه المذكورتين يكونان على نسبة واحدة أعنى نسبة م د : م ه :: ا د : ا ه •
 لانه فرض ان نسبة د د : ا : د ه فاذا أخذ د م المساوي لقطر ا د عوضا عنه تصير نسبة د د : د م :: ا د : د م :
 د ه ولاشتراك زاوية د في مثلتي د د م و د ه م وناسب الاضلاع المحيط بها يتشابه المثلثان المذكوران وتكون نسبة الضلع الثالث م د فيهما الى ضلع م ه كنسبة د د الى د م أولى ا لكن نسبة د د : ا :: ا د : د ه وحيث ان المناسبة لم تزل متناسبة بطريقة الفضل تكون نسبة د د : ا :: ا د : د ه - د د : د ه - د د : د ه - د د : د ه - د د : د ه :
 د د : ا :: ا د : د ه وبساوى النسبة في هذا التناسب والذى تقدم ثبت المطلوب وهو ان نسبة م د : م ه :: ا د : ا ه

(بيان الدعوى العملية المتعلقة بالمقالة الثالثة)

• (الدعوى الاولى العملية) •

طريقة تقسيم الخط المستقيم المحدود الى اقسام متساوية بقدر ما يراد • (اولى اقسام متناسبة لطول معلومة

(شكل ١٣٧) الحالة الاولى اذا اريد تقسيم خط ا ر المستقيم الى خمسة اقسام متساوية يرسم خط ال غير المحدود من نهاية ا ويؤخذ مقدارا

ا ح ويقل على خط ا ل خمس مرات ويوصل بين د نهاية القسم الخامس
وبين - بخط د ه فاذا رسم خط ح ح موازيا لخط د ه فنقسم
ا ح يكون خمس ا - فاذا اخذ قسم ا ح خمس مرات على خط ا -
فنبقى الى خمسة اقسام متساوية لانه يلزم من كون خط ح ح موازيا
لخط د ه ان ينقطع خط ا - و ا د فينقطق ح ح على التماس
ولكن من كون قسم ا ح خمس خط ا د يكون ا ح خمس خط ا -
المقالة الثانية (شكل ١٣٨) اذا اريدت تقسيم خط ا الى اقسام متناسبة
لخطوط د و م و ل المألوفة يرسم من نقطة ا خط ا ز غير
محدود ويؤخذ خط ا ح مساويا لمقدار د و ح مساويا لمقدار م
و ح مساويا لمقدار ل ويوصل بين ه باقي - و ه فاذا رسم
من نقطتي ح و ه خطا ح ح و د موازيين لخط ه ه فاقسام
خط ا - وهي ا ح و ح د و د ه - تكون مناسبة لخطوط د
و م و ل المقروضة

لانه من كون خطوط ح ح و د و ه متوازية تكون اقسام
ا ح و ح د و د ه مناسبة لاقسام ا ح و ح د و د ه ومن
كون اقسام ا ح و ح د و د ه مساوية لاقسام د و م و ل
فتكون ا ح و ح د و د ه اقسام خط ا - مناسبة لتلك الخطوط
المقروضة ويثبت المطلوب

• (الدعوى الثانية العملية) •

(شكل ١٣٩) طريقة استخراج الرابع المناسب لثلاثة خطوط معلومة
ا - و - ح يرسم خطنا د ه و د على ان يحد ازاوية
ويؤخذ على خط د ه خط د ح مساويا لخط ا ح متساويا لخط
- وعلى خط د ه يؤخذ د ح مساويا لخط ح ح ويوصل د ه فاذا رسم
خط ح ح موازيا لخط د ه فنقسم خط د ه يكون هو الرابع المناسب
المطلوب

لأنه يلزم من كون خط ط ح موازيا لخط د ه أن يحصل هذا التناسب وهو
 أن تكون نسبة د ر : ح :: د ك : ط وحيث أن في هذا التناسب
 ثلاثة حدود متساوية الثلاثة خطوط المعلومة صارت نسبة ا : ت ::
 د : ط وثبت المطلوب من أن يكون خط ط ح هو الرابع

المتناسب

نتيجة وكذلك يستخرج الثالث المتناسب بقدر اى ا و ه المعلومين كما يستخرج
 الرابع المتناسب لأن استخراج الثالث المتناسب هو عين استخراج الرابع
 المتناسب لثلاثة خطوط ا و ه و ه المعلومة المذكورة
 (الدعوى الثالثة العظيمة)

طريقة استخراج الوسط المتناسب بين مقداري ا و ه المعلومين
 (شكل ١٤٠) يؤخذ على خط د و المستقيم الغير المحدود خط ا = ه
 و ه د = ت ويجعل د و نصف قطر ويرسم نصف دائرة و د
 ويقام على القطر عمود ه ز من نقطة ه ويمتد ذلك العمود حتى يلاق المحيط
 في نقطة ز فعزود ه ز هو الوسط المتناسب المطلوب ه لأنه يلزم من
 كون عمود ه ز متزاهيا على القطر من نقطة ز الواقعة على المحيط أن يكون
 وسطا متناسبا بين سهمي د ه و ه ط ومن كونه ه ز السهمين
 مساويين لطى ا و ه المعلومين ثبت المطلوب من أن يكون ذلك العمود
 وسطا متناسبا بين مقداري ا و ه

(الدعوى الرابعة العظيمة)

(شكل ١٤١) طريقة تقسيم خط ا ب المستقيم المعلوم إلى قسمين بان
 يكون القسم الأكبر وسطا متناسبا بين الخط الكامل والجزء الأصغر
 فيقام عمود د ه من نقطة د مساوية لعمق ا ب ويجعل نقطة ه
 مركزا ونصف قطر د ه يرسم محيط دائرة فاذا وصل ا ه قطع محيط الدائرة
 في نقطة ز فالأحدا ا ه أو مساويا لخط ا ه نقطة ا ب ينقسم في نقطة ز
 كما هو المطلوب يبقى لتكون نسبة ا : ز :: ا ب : د و

ا- = اء

* (الدعوى السادسة العملية) *

طريقة انشاء مربع مكافئ لشكل متوازى الاضلاع معلوم أوثلث مفروض (شكل ١٤٣) أولا اذا كان ا- ح د متوازى الاضلاع معلوما و ا- قاعدة و د ارتفاعه أقول يستخرج طء الوسط المناسب بين قاعدة ا- و ارتفاع د و ينشأ على الوسط المذكور مربع ف هـ ذا المربع بصير مكافئا لتوازى الاضلاع ا- ح د

لانه يلزم من كون نسبة ا- : طء :: طء : د ان يكون $\frac{طء}{ا-} = \frac{د}{طء}$ ومن كون مستطيل ا- ح د هو مساحة متوازى الاضلاع من أجل ذلك ثبت المطلوب ان يكون المربع المنشأ على طء مكافئا متوازى الاضلاع المقروض

ثانيا (شكل ١٤٤) اذا كان ح د قاعدة مثلث ا- ح د المقروض و اء ارتفاعه فيؤخذ الوسط المناسب بين قاعدة ح د و نصف ارتفاع اء وينشأ على هذا الوسط مربع ف هـ ذا المربع يكافئ مثلث ا- ح د

لانه يلزم من كون نسبة ح د : طء :: طء : $\frac{1}{2} اء$ او بالعمل ان يكون $\frac{طء}{ح د} = \frac{1}{2} اء$ وحيث ان ح د $\times \frac{1}{2} اء$ مساحة مثلث ا- ح د ثبت المطلوب من ان يكون المربع المنشأ على طء مكافئا له

* (الدعوى السابعة العملية) *

(شكل ١٤٥) طريقة رسم مستطيل اء هـ ط على خط اء المستقيم المقروض مكافئا لمستطيل ا- ح د

فيستخرج الرابع المناسب لخطوط اء و ا- و اء وهو ا ط فالمستطيل الحادث من خطى اء و ا ط يكافئ مستطيل ا- ح د لانه يلزم من كون نسبة اء : ا- :: اء : ا ط بالعمل ان يكون اء $\times ا ط = ا- \times ا ط$ فلذا صار مستطيل اء هـ ط مكافئا لمستطيل ا- ح د و ثبت

المكافئين يحصل شكل كثيرا الاضلاع $ا ب ح د ه$ من جهة ومن الاخرى
 يحصل ذوا ربعة اضلاع $ا ب ح د$ و فلذا علم ان كثيرا الاضلاع يكافئ ذوا ربعة
 اضلاع واذا وصل وتر $ا د$ ورسم من نقطة $ح$ خط $ح د$ موازيا لخط $ا ب$
 ووصل $د ر$ كما مر يثبت ان يكون مثلث $ا ب ح$ مكافئاً للمثلث $ا د ر$ وحينئذ
 يكون مثلث $د ر و$ مكافئاً لذى اربعة اضلاع $ا ب ح د$ و اولئكافئته وهو مخمس
 $ا ب ح د ه$ يعنى ان المثلث المذكور يكافئ ذاك الشكل الكثير الاضلاع
 المقروض $ه$ وقس على هذا سائر الاشكال الكثيرة الاضلاع المستقيمة لان في هذا
 العمل يصير تنزيلا احاد الاضلاع مرة بعد اخرى حتى يفنى الشكل الى المثلث
 تنبيه يمكن انشاء مربع مكافئ لاي شكل مستقيم الاضلاع معلوم اذ تقدم انه
 يمكن تحويل المثلث الى مربع (٦٤) * وهذا العمل يسمى تربيع الشكل
 المستقيم الاضلاع

واما مسئله تربيع الدائرة فهى طريقة انشاء المربع المكافئ لدائرة معلومة
 القطر

• (الدعوى الحادية عشرة العملية) •

طريقة انشاء مربع مساو لجموع مربعين معلومين والى تفاضل بينهما
 (شكل ١٤٧) اذا كان $ا و$ ضلعى المربعين المعلومين
 أولا لاجل استخراج مربع مساو لجموعهما ينشأ خطا $ه و د$ $ه ح$
 المستقيمان الغير المحدودين بان يكونا متعامدين فاذا اخذ $ه و$ مساويا للضلع
 $ا و$ $ه ر$ مساويا للضلع $ح د$ ووصل $د ر$ فهذا الخط الموصول هو ضلع
 المربع المطلوب لانه يلزم من كون مثلث $د ه ر$ قائم الزاوية ان يكون المربع
 المنشأ على وتر $د ر$ مساويا لجموع المربعين المنشأين على ضلعى $د ه و$ $ه ر$
 وثانيا اذا اريد انشاء مربع مساو للتفاضل بينهما ترسم زاوية $ه ح ا$ القائمة
 ويؤخذ $ه د$ مساويا للضلع الاصغر من ضلعى $ا و$ $ح د$ فاذا جعلت نقطة
 $ر$ من مركزا وبعد $ر ح$ المساوى للضلع الاكبر رسم قوس دائرة يقطع خط
 $ه ح$ فى نقطة $ع$ فالربع المنشأ على $ه ح$ مساو للتفاضل بين المربعين

المشأين على خطى أ و س • لانه يلزم من كون مئذ ه د ح قائم الزاوية
ووتر د ح مساويا ضلع أ وعمود ه د مساويا ضلع س ان يكون المربع
المشأ على ه د يساوى التفاضل بين المربعين المشأين على خطى أ و س
وبقيت المطلوب

(تنبيه) هذه الطريقة يمكن انشاء مربع يكافئ مجموع مربعات قدر ما يراد
أو يكافئ التفاضل بين مجموع مربعات وبين مجموع مربعات آخر
لانه يمكن انشاء مربع يساوى مربعين وانشاء مربعين يساوى بان ثلاث مربعات
ومنه يمكن انشاء مربع واحد وهكذا الى آخره وقد يمكن بهذه الطريقة أيضا انشاء
مربع يساوى التفاضل بين مجموع مربعات وبين مجموع مربعات آخر
(الدعوى الثانية عشرة العملية) *

(شكل ١٥٠) المراد انشاء مربع نسبته الى مربع أ س د المقروض
كسبة خط ك الى ل

فاذا أخذ على خط ه د المستقيم الغير المحدود ه و مساويا لخط ك و د و
مساويا لخط ل وجعل ه د قطرا وانشأ عليه نصف محيط دائرة واقم عمود
و ح من نقطة و الواقعة على هذا القطر المنتهى الى محيط الدائرة ومن نقطة
ح يرسم وتر ح ر و ح ه ويمتد اجهة ه و ر ويؤخذ ح ع
مساويا لخط أ س ضلع المربع المعلوم ومن نقطة ع يرسم خط ط ع
موازيا لخط ه ر نخط ح ط هو ضلع المربع المطلوب

لانه يلزم من كون ط ع و ه د متوازيين ان تكون نسبة ح ط :
ح ع :: ح ه : ح د وحيث ان الاربعة المتناسبة مربعاتها متناسبة
تكون نسبة ح ط : ح ع :: ح ه : ح د ولكن مثلث ه د ح القائم
الزاوية فيه نسبة مربع ضلع ح ه الى مربع ضلع ح د كسبة مهم وه
الى مهم ور أو كسبة مساوية ما أى كسبة خط ك الى خط ل وحيث ان
في هذا التناسب والنسبة سبقت ح ه : ح د مشتركة بينهما تكون نسبة

ح ط : ح ع :: ك : ل ولكن من كون ح ع = ا ب يقتضى ان
تكون نسبة المربع المتشاعلى ح ط الى المربع المتشاعلى ا ب كنسبة
خط ك الى خط ل ويثبت المطلوب

• (الدعوى الثالثة عشرة العملية) •

(شكل ١٢٩) طريقة رسم شكل كثير الاضلاع على ضلع ور تطير ضلع ا ب
مشابه الشكل ا ب ح وه كثير الاضلاع الآخر فاذا رسمت ا ب و ا د
من الشكل كثير الاضلاع المعلوم ومن نقطة د ترسم زاوية د و ح مساوية
لزاوية ا ب ح ومن نقطة د ترسم زاوية د و ح مساوية لزاوية ا ب ح فثلث
د و ح الحادث من تلاقى خطى د و ح و ح فى نقطة ح يكون مشابها المثلث
ا ب ح وكذلك يرسم مثلث و ط ح على ضلع و ح تطير ا د مشابها المثلث
ا ب ح ويرسم ايضا مثلث و ط ع على ضلع و ط تطير ا د مشابها المثلث
ا ب ح فكثير الاضلاع د و ح ط الحداث بصير مشابها لكثير الاضلاع
المفروض وهو الشكل المطلوب

لانه قد تركب من مثلثات متشابهة مفضدة العدد متعائلة الوضع

• (الدعوى الرابعة عشرة العملية) •

اذا كان الشكلان المتشابهان معلومين وأريد انشاء شكل مشابه لهما ومساو
لجموعهما أو للتفاضل بينهما • أقول حيث ان ا ب و ب ح هما ضلعان
متناظران فبما فاذا أنشئ المربع المكافئ لجموع المربعين المتشابهين عليهما
أو للتفاضل بينهما وكان ضلعه ب ح نظيرا لضلعى ا ب و ب ح فعلى ما فى
الدعوى التى تقدمت الشكل المتشاعلى هذا الضلع مشابها للشكلين المرقومين
يكون هو المطلوب

لان نسبة الاشكال المتشابهة كنسبة مربعات اضلاعها المتناظرة وحيث ان
المربع المتشاعلى ب ح مساو لجموع المربعين المرسومين على ضلعى ا ب و ب ح
أو للتفاضل بينهما يقتضى ان يكون الشكل المتشاعلى عليه مشابها للشكلين
المعلومين مساويا لجموعهما أو للتفاضل بينهما ويثبت المطلوب

(الدعوى)

• (الدعوى الخامسة عشرة العملية) •

المراد إنشاء شكل مشابه لشكل معلوم آخر بان تكون نسبة الشكل المطلوب الى الشكل المعلوم كنسبة مقدار م الى مقدار د المعلومين
فاذا فرض ضلع الشكل المعلوم آ وكان نظيره في الشكل المطلوب سم يلزم ان تكون نسبة م الى د كنسبة مربع آ الى مربع س (٢٧ مقالة ٣)
فيستخرج مقدار سم كما صرح به في الثانية عشرة العملية ويجري باقي العمل كما ذكر في الدعوى الثالثة عشرة العملية ويثبت المطلوب

• (الدعوى السادسة عشرة العملية) •

(شكل ١٥١) طريقة اءال شكل مشابه لشكل ك ومكافئ لشكل ل
فيستخرج م ضلع المربع المكافئ لشكل ك وكذلك يستخرج د
ضلع المربع المكافئ لشكل ل ويستخرج سم الرابع المتناسب للثلاثة
مقادير م و د و ا فاذا أنشئ شكل مشابه لشكل ك على ضلع سم
نظير ضلع ا فلهذا الشكل المرسوم يكافئ شكل ل
لانه اذا أشبه الى الشكل المنشأ على الضلع سم بحرف ع فن تناسب
مربعات اضلاع الاشكال المتشابهة تكون نسبة ك : ع :: ا : آ
: سم ولكن من كون نسبة ا : سم :: م : د او ا : آ :
سم :: م : د بالعمل ولوجود النسبة المشتركة في هذا التناسب والذي
تقدم تكون ك : ع :: م : د وحيث ان $\frac{م}{د} = \frac{ك}{ع}$ و $\frac{ك}{د}$
= تكون نسبة ك : ع :: ك : ل وتساوى المقدمين لزم
تساوى التالين ولذا يكون ع = ل ويثبت المطلوب من أن يكون
شكل ع متساويا ك ومكافئا ل

• (الدعوى السابعة عشرة العملية) •

(شكل ١٥٢) طريقة رسم مستطيل بان يكون مجموع ضلعيه المتجاورين

مساويا لخط a ومكافئاً للمربع γ المعلوم * يرسم نصف محيط على a يكون خط a قطره ويعد a المساوي لضلع المربع المعلوم يرسم خط de موازاً للقطر المذكور فاذا أنزل من نقطة e التي هي ملتقى الخط الموازي بالخط عمود $هو$ على ذلك القطر خطاً a و $و$ يكونان ضلعي المستطيل المطلوب يعني مستطيل $ad \times$ و $و$ يساوي مربع $هو$ أو مربع a ومن كون a مساوياً لضلع مربع γ ثبت المطلوب من أن يكون $ad \times$ و $=$ و γ

تنبيه شرط في إمكان إجراء عمل هذه الدعوى العملية أن يكون بعد a لا يتجاوز نصف القطر يعني لا بد أن يكون ضلع مربع γ أصغر من نصف خط a * (الدعوى الثامنة عشرة العملية)

(شكل ١٥٣) طريقة أعمال مستطيل يكون التفاضل بين ضلعيه المتجاورين مساوياً لخط a المعلوم ومكافئاً للمربع γ المقروض يرسم محيط دائرة على أن يكون خط a قطرها ومن نهاية هذا القطر يقام عمود a مساوياً لضلع المربع المعلوم فاذا رسم خط $و$ والقاطع المار بنقطة $د$ ومركز $ن$ خطاً $او$ و $هو$ هما الضلعان المتجاوران من المستطيل المطلوب

أولاً لأن التفاضل بينهما مساو هو أو قطر a وثانياً لأن مستطيل $هو \times$ و $و$ يساوي مربع a فثبت المطلوب من أن يكون ذلك المستطيل مكافئاً للمربع γ * (الدعوى التاسعة عشرة العملية)

طريقة استخراج المقياس المشترك بين قطر المربع وضلعه أن كان بينهما مقياس مشترك

(شكل ١٥٤) إذا كان a و $د$ مربعاً و a قماره فلابد أن يكونا مشتركين قطر a على ضلع $د$ كم مرة يلزم أن يوضع $د$ على قطر a بأن تجعل نقطة $د$ مركزاً ونصف قطر $د$ يرسم نصف دائرة و $هو$ فضل $د$

يشغل عليه قطر a مرفوضي a كسرا كجاري فخارج القسمة من هذا العمل الأول ١ و a كسري فيجب تعيين هذا الكسري بضع a أو بمساويه a

فيؤخذ a مساويا لكسر a واذا وضع أيضا a على a وقدر به قسم a يشغل عليه ضلع a مرتين وأيضاً يقي كسر فلذا علم انه اذا جرى العمل متواليًا فالكسور الباقية تصغر حتى تصير غير محسوسة بل تكاد تنعدم واذاً يكون ذلك العمل غير مقرون بحصة بل يصير عملاً غير متناه فلذا حكم انه لا مقياس مشترك بين خطي a و a لكن لا جرم ان اجراء العمل بواسطة الخطوط الباقية التي لا تزال على قدر واحد مع اجتناب تصغير الخطوط وتقيصها السهل فلقبام زاوية a يصير خط a عماسا وخط a قاطعا مخرجاً من نقطة القياس ومن غشة كانت $a : a :: 1 : a$ و $a : a$ فلاجل تقدير a و a يمكن أن يؤخذ مكانها a و a في العمل الثاني لكن حيث ان a أو مساويه a يعد خط a مرتين ويقي a كسرا فخارج القسمة يكون عدد ٢ و اذا وحيث لزم تعيين كسر a بخط a فاذا اخذ خط a و a مكان a و a لكون $a = a$ يصير خارج القسمة في العمل الثالث ٢ و a كسرا فعلم انه لا يزال يظهر كسراً لانها تقترأ الى ذلك وعلم من هذا ان لا مقياس مشترك بين قطر المربع وضلعه كما صرح به أيضاً في علم الحساب

لانه قد علم ان النسبة بينهما $2 : 1$ الا انه حاصل كسب اطلاع واقر في هذه الدعوى بطريق الهندسة

• (تنبيه) • لقد ظهر انه لا يمكن وجود نسبة بعدد حقيقي صحيح بين قطر المربع وضلعه الا تقرينا بواسطة الكسور والمتسلسلة فخارج القسمة من العمل الأول ١ و a كسرو من العمل الثاني والثالث وسائر الاعمال خارج القسمة

اثان و اء كسر فلذا وقت تلك الكسور المتسلسلة ههنا

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

وهكذا بلا نهاية $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

فاذا حسبت هذه الكسور المتسلسلة الى الحد الرابع الذي في الابتداء يصير مقدارها $1 \frac{15}{16}$ او $\frac{31}{16}$ يعنى ان النسبة التقريبية بين قطار المربع وضلعه صارت :: ٤١ : ٢٩ وان حسبت حدود كثيرة من هذه المتسلسلة تزداد تلك النسبة تقريبا حتى تكاد تكون تحقيقية

(المقالة الرابعة)

في بيان الاشكال المستقيمة الاضلاع عموما وخصوصا
في الاشكال الكثيرة الاضلاع المنتظمة ومقاوير الدوائر ومسائرها

المحروود

اذا كان كثيرا الاضلاع متساوي الاضلاع والزوايا يسمى منتظما وعموما كل
شكل مستقيم الاضلاع يكون منتظما اذا تساوت اضلاعه وزواياه حتى ان
الثلث المتساوي الاضلاع والمربع عدل منهما شيكلا منتظما وقيل له هذه
الاشكال اشكال مضلعة منتظمة.

* (الدعوى الاولى النظرية) *

كل شكلين منتظمين متجهدين في عدد الاضلاع n يكونان متشابهين
(شكل ١٥٥) مثلا اذا كان $n=3$ وهو \triangle و $n=4$ وهو \square كل مسدسين
منتظمين فمجموع الزوايا من n كل منهما متحد ويساوي ثمانية قوائم
(مقالة ١) فتكون زاوية $r = 1$ حيث كانت كل واحدة منهما احدس
ثماني قوائم وأبضا زاوية $s = 2$ وزاوية $t = 3$ وهكذا الى آخره
ولا انتظام كل منهما لازم أن تكون اضلاع a و b و c الخ متساوية
وكذا d و e و f و g و h الخ فيصير في تناسب $a : b :: c : d :: e : f :: g : h ::$
 $s : t :: u : v :: x : y :: z : \dots$ الخ فعلى هذا صارت الاضلاع المتناظرة
من هذين الشكلين متناسبة والزوايا متساوية وثبت المطلوب من أن يكونا
متشابهين (حد ٢ مقالة ٢)

نتيجة كثيرا الاضلاع المتحدان في عدد الاضلاع وعموما جميع الاشكال المستقيمة
الاضلاع المنتظمة المتحددة العدد تكون النسبة بين محيطها n كالنسبة بين
اضلاعها المتناظرة والنسبة بين مطوحيها n كالنسبة بين مربعي اضلاعها
المتناظرة (٢٧ مقالة ٢)

• (تنبيه) • تعيين زاوية الشكل المنتظم بواسطة عدد الاضلاع كما تبينت زوايا الاشكال الكثيرة الاضلاع المتساوية الزوايا

• (الدعوى الثانية النظرية) •

(شكل ١٥٦) كل شكل مستقيم الاضلاع منتظم يمكن رسم دائرة خارجة مارة بجميع زواياه وداخله تنحاص بجميع اضلاعه

الصورة الاولى مثلا اذا كان شكل $a - b - c - d$ الخ منتظما ونصور مرور محيط دائرة بثلاث نقط a و b و c بان تكون نقطة c مركزه ونزل عمود $ط$ على وسط $c - d$ ووصل $ط$ ا و $ط$ ب فيمكن تطبيق ذى الاربعة الاضلاع $ط - c - d$ الحادث على $ط - a - b$ ذى الاربعة الاضلاع الاتري بان يكون ضلع $ط$ مشتركين الشكلين المذكورين وتساوى زاويتي $ط - c - d$ و $ط - a - b$ لقيامهما فينطبق ضلع $c - d$ على مساويه $a - b$ وتقع نقطة d على نقطة a وحيث ان ذلك الشكل منتظم تكون زاوية $c - d - a = ١٢٠$ و يقع d على امتداد ضلع $a - b$ ومن كون $d - a - b = ١٢٠$ و $a - b - c$ فوق نقطة a ويتساوى ذوا الاربعة الاضلاع المرقومان مع كمال الانطباق فيعد $ط$ يساوى أيضا $ط$ ا ومن ثمة علم ان المحيط الماوي بثلاث نقط a و b و c يمر أيضا بنقطة d وبمثل هذا ثبت ان محيط الدائرة التي يمر بنقط a و b و c يمر بنقطة d وهكذا على التوالي اي يمر بؤس سائر الزوايا ومن أجل ذلك ثبت المطلوب انه يمكن رسم محيط دائرة على كل منتظم

ثانيا حيث ان اضلاع $a - b - c - d$ الخ أوتار متساوية تنظر الى المحيط فتساوى ابعادها من المركز (٨ مقالة ٢) فلذا اذا جعلت نقطة $ط$ مركزا ورسم محيط دائرة به ف قطر $ط - c$ فهوذا المحيط يمر بمساوي وسط ضلع $c - d$ وبوسط كل من سائر اضلاع الشكل الكثيرة الاضلاع ومن أجل ذلك كان هذا المحيط هو الرسوم داخل كثير الاضلاع المعام بجميع اضلاعه أو بصبر ذلك الشكل مرسوما على ذلك المحيط وثبت المطلوب

• (قبيـه ١) • حيث صارت نقطة ط مركزاً للدائرة المرسومة داخلها وخارجها هي مركز تلك كل كثير الاضلاع المنتظم وزاوية ا ط ر الحاصلة من احاطة ق بم في القطر الواصلين الى م ابقى ضلع ا ر تسمى مركزية • وتساوي اوتار ا ر و ر ح الخ فتساوي سائر الزوايا المركزية وكل واحدة منها تساوي خارج القسمة من تقسيم اربع قوائم على عدد اضلاع الكل الكثير الاضلاع • (تنبيه ٢) • لاجل رسم كثير اضلاع منتظم ما داخل الدائرة يقسم محيطها الى اقسام متساوية بعدد اضلاع ذلك الشكل ثم يوصل بين نقط التقسيم (شكل ١٥٨) لانه في تساوت الاقسام تساوت اوتار ا ر و ر ح و ح ط الخ فتساوي الاضلاع والزوايا من مثلث ا ر ط و ر ط ح و ح ط ط فلزم تساوي زوايا ا ر ح و ر ح ح و ح ط ح الخ القوي اضعا ف تلك الزوايا وتساوي الاضلاع والزوايا من شكل ا ر ح ح ط الخ تظهر انتظامه

• (الدعوى الثالثة العملية) •

طريق رسم المربع داخل الدائرة المعلومة

(شكل ١٥٧) فاذا رسم قطرا ا ح و ر ه على ان يتقاطعا عودين ووصل بين نهيلت ا و ر و ح و ح ط فشكل ا ر ح ح هو المربع المطلوب • لان اوتار ا ر و ر ح و ح ط و ح ا متساوية لتساوي زوايا ا ه ر و ر ه ح و ح ط ح و ح ا ح القوائم ولوقوع زوايا ا و ر و ح و ح ط في نصف الدائرة صارت كل واحدة منها قائمة ولذا ثبت المطلوب من ان يكون الشكل الرقيم مربعا

(قبيـه) حيث ان مثلث ر ه ح متساوي الساقين قائم الزاوية حصل تناسب ر ح : ر ه :: ٢ : ١ (١١ مقالة ٣) فبين ان نسبة ضلع المربع المرسوم داخل الدائرة الى نصف القطر كنسبة جـ ر مربع عدد ٢ الى الواحد

• (الدعوى الرابعة العملية) •

طريق رسم المسدس المنتظم والمثلث المتساوي الاضلاع داخل الدائرة
المعلومة

(شكل ١٥٨) لاجل حل هذه الدعوى يفرض ان ار ضلع من اضلاع
المسدس المراد رسمه داخل الدائرة ويرسم نصف قطر ا ط و س ط فثلث
ا ط ر الحادث يكون متساوي الاضلاع * لان زاوية ا ط ر سدس
اربع قوائم فاذا جعلت القاشعة ا ح د زاوية ا ط ر $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ وأبضا
يصير مجموع زاويتي ا س ط و ر ا ط الاخرين منه $(2 - \frac{2}{3})$
او $\frac{4}{3}$ وحيث ان هاتين الزاويتين متساويتان يكون مقدار كل واحدة منهما
 $\frac{2}{3}$ فصار مثلث ا س ط متساوي الاضلاع لتساوي زواياه الثلاث
فظهر ان ضلع المسدس المرسوم داخل الدائرة مساو لنصف القطر * فاذا وضع
نصف القطر المرقوم ودور على المحيط فالآخر منه ينطبق آخره بنهاية الاول في نقطة
الابتداء وينقسم به محيط الدائرة الى ستة اقسام متساوية فاذا وصلت الاوتار
حدث المسدس المطلوب

وماعدا هذا تم وصل بين كل اثنين على التوالي من رؤس زوايا مسدس ا ر د ه و
هو مع ترك ا اخرى بينهم يحدث ا ه المثلث المتساوي الاضلاع

(تنبيه) حيث ان ا ر = ر د = د ه = ه و ا ط = ط ه فيكون شكل
ا ر د ه متوازي الاضلاع معينا (٤ مقالة ٣) فصار ا ر + س ط يعنى

مجموع مربعي القطرين يساوى مجموع مربعات الاضلاع الاربعة أى ا ر + ا ر
او ا س ط * فاذا طرح من كل من هذين المتساويين مربع س ط يكون
ا ر = ر د فاذا وضعت هذه المتساوية في صورة التناسب يصير ا ر

: س ط :: ٣ : ١ او ا ه : س ط :: ٣ : ١ فاذا اظهر ان
النسبة بين ضلع المثلث المتساوي الاضلاع المرسوم داخل الدائرة وبين نصف
القطر كالنسبة بين جذر مربع عدد ٣ وبين الواحد

• (الدعوى الخاتمة العملية) •

طريقة رسم المعشر المنتظم والنحبي المنتظم وذى الخمسة عشر ضلعا المنتظم داخل الدائرة المعلومة

(شكل ١٥٩) أقول اذا قسم نصف قطر $أع$ في نقطة $م$ على نسبة الوسط والطرفين (٤ على مقالة ٣) واخذوتر $ا - م$ مساويا لـ $ا - م$ محيطه ووضع المعشر المنتظم • فاذا دوو على المحيط عشر مرات يقسم المحيط الى عشرة أقسام متساوية • لانه اذا وصل $م$ - $ت$ نصير $ا - ع : م :: م : ع$: $ا - م$ بالعمل ومن كون $ا - م = م - ع$ فاذا وضع مكانه يكون $ا - ع : ا - م :: ا - م$ ولاشتراك الزاوية في مثلث $ا - م - ع$ و $ا - م$ مع تناسب الاضلاع المحيطه به الزم ان يكون هذان المثلثان متشابهين (٢٠ مقالة ٣) وتساوى ساقى مثلث $ا - ع - م$ ثلث $ا - م$ المشابهة ايضا يكون متساوى الساقين ويكون $ا - م = م - ع$ ولكن $ا - م = م - ع$ فصار $م - ع = م - ع$ فيكون مثلث $م - ع - ا$ ايضا متساوى الساقين فزاوية $ا - م - ع$ الواقعة خارجة مثلث $م - ع - ا$ المتساوى الساقين ضعف زاوية $ع - ا - م$ الواقعة داخله (مقالة ١) وحيث ان زاوية $ا - م - ع = م - ا - ع$ فصار كل من زاويتي $ع - ا - م$ و $ع - ا - م$ الواقعتين على قاعدة مثلث $ا - ع - م$ ضعفا لزاوية $ع - ا - م$ الرأسية فعلم ان مجموع ثلاث زوايا المثلث المذكور خمسة أمثال زاوية $ع - ا - م$ فكانت هي خمس قائمتين أو عشر أربع قوائم فقول $ا - م$ يصير مشرب محيط الدائرة وثبت المطلوب من أن يكون وتر $ا - م$ هو ضلع المعشر المطلوب

(نتيجة ١) متى وصل بين كل زاويتين منه غير متجاورتين على التوالي يحصل منحني $ا - ع - ر - ط$

(نتيجة ٢) متى كان $ا - م$ ضلع المعشر و $ا - م$ ضلع المثلث فقول $ا - م$ يصير $(\frac{1}{2} - \frac{1}{10})$ أو $\frac{1}{10}$ تقطر الى المحيط

فوتر $ا - م$ يكون ضلع كثير الاضلاع المنتظم ذى الخمسة عشر ضلعا ولاجرم ان

قوس δ و θ ثاقوس δ

(نقبيه) متى رسم كثير الاضلاع داخل الدائرة وقسمت الاقواس الموزنة لاضلاعه
بتساويين ووصلت أوتار انصاف الاقواس فيحصل كثير الاضلاع بعدد اضلاعه
ضعف عدد اضلاع الاول * فلذا استعمل المربع لانشاء ~~كثير~~ كثير الاضلاع
ذي ٨ و ١٦ و ٣٢ الخ والمسدس الذي ١٢ و ٢٤ و ٤٨ الخ
والعشر الذي ٢٠ و ٤٠ و ٨٠ الخ وذوالجسة عشر الذي ٣٠ و ٦٠
و ١٢٠ الخ وهكذا على التوالي

اعلم انه من سنين متعددة كان يمكن رسم كثير الاضلاع داخل الدائرة
بطريق الهندسة والدرجة الاولى والثانية من علم الجبر الاما قد ذكره هذا
عند السلف لكنه تبين بايستناد الى المهندس غوس التساوي ذكره في كتابه الذي
طبع في ناجية ساقيوينا سنة ألف وثمانمائة وواحد من تاريخ المبلادان قد
أمكن رسم كثير الاضلاع ذي السبعة عشر ضلعا داخل الدائرة وعموما علم
ان للشكل المنتظم ذي $n + 1$ من الضلع قابلية ان يرسم داخل الدائرة
الا ان $n + 1$ يلزم ان يكون عددا أوليا في كل حال
(الدعوى السادسة العملية) *

(شكل ١٦٠) طريق انشاء كثير الاضلاع على الدائرة مشابه الشكل ا- و
الخ الكثير الاضلاع المقروض المرسوم داخل تلك الدائرة
أقول اذا رسم خط $ر ح$ المماس من نقطة $م$ وسط قوس $ا ب$ فهذا المماس
يصير موازيا للضلع $ا ب$ (١٠ مقالة ٢) وكذا اذا رسمت الخطوط الموازية من
اواسط اقواس $ب ج$ و $ج د$ الخ فمن تلاق تلك الخطوط المماسية يحصل كثير
الاضلاع $ر ح ط$ الخ خارج الدائرة ويكون مشابها للشكل كثير الاضلاع
المعلوم المرسوم داخلها وتقع نقط $ق و ت و ح$ الثلاثة على خط مستقيم
واحد كما لا يخفى

لان في مثلثي $ق م ح$ و $ت ح د$ المتماثلين الزاوية وتر $ق ح$ مشترك وضلع
 $ق م$ مساو لضلع $ت د$ فهذان المثلثان يتساويان لتساوي الوتر والضلع فيهما

(مقالة ١) وتكون زاوية م ح ح مساوية لزاوية ح ق د فلذا خط ق ح المستقيم يمر بنقطة ر وسط قوس م د * وبمثل هذا يثبت ان تقع نقطة ط على استقامة خط ق د وكذا سائر النقاط ومن توازي خط ر ح اضلع ا ر وخط ح ط اضلع ر ح فزاوية ر ح ط تساوي زاوية ا ر ح (مقالة ١) وكذا زاوية ح ط د و ر ح د وكذا باقي الزوايا فتكون زوايا الشكل المرسوم على الدائرة مساوية لزوايا الشكل المرسوم داخلها وتوازي اضلاعهما فتكون ر ح : ا ر :: ق ح : ق د وكذلك ط ح : ر ح :: ق ح : ق د ولوجود النسبة المشتركة تكون ر ح : ا ر :: ح ط : ر ح وليكون ا ر = ر ح يكون ر ح = ح ط * وبمثل هذا ثبت ان يكون ح ط = ط د وكذا البواقي * فن تساوي اضلاع الشكل المرسوم على الدائرة يقتضي ان يكون منتظما وثبت المطلوب من أن يكون مشابها للشكل المرسوم داخلها

(نتيجة ١) وبالعكس اذا كان كثير الاضلاع ر ح ط ا الخ المرسوم فوق الدائرة مقبولا مفرضا وأريد ان يرسم بواسطة شكل ا ر ح د الخ كثير الاضلاع داخل الدائرة فحسبك وصل خطوط ق د و ق ح و ح ط الخ المستقيمة من ر ح و ط الخ رؤوس زوايا كثير الاضلاع المعلوم * فاذا رسمت أوتار ا ر و ر ح و ح د الخ بين ا و ر و ر ح و ح د الخ نقاط تقاطع محيط الدائرة بالخطوط الموصولة يحدث الشكل الكثير الاضلاع المرسوم داخل الدائرة وايضا اذا وصلت أوتار م د و د ه بين م و د و د ه الخ فقط الخمس يحدث الكثير الاضلاع المرسوم داخل الدائرة المشابه للكثير الاضلاع المرسوم عليها

(نتيجة ٢) كافة كثيرى الاضلاع التي يمكن رسمها داخل الدائرة ايضا يمكن ان ترسم خارجها وعكسا

• (الدعوى السابعة النظرية) •

مساحة كثير الاضلاع المنتظم تساوي حاصل ضرب محيطه في نصف نصف قطر

الدائرة المرسومة داخله

(شكل ١٦٠) مثلاً إذا كان $دح$ طء الخ كثيرة الاضلاع منتظماً كما يرى من هذا الشكل فمساحة مثلث $دح$ تكون $دح \times \frac{1}{2} ق م$ وأيضا مساحة مثلث $ق ح ط$ تكون $ط ح \times \frac{1}{2} ق د$ ومن كون $ق د = ق م$ فمساحة الحاصلين تكون $(دح + ح ط) \times \frac{1}{2} ق م$ فإذا أجرى العمل المذكور لأجل مساحة سائر المثلثات الأخر المشتمل عليها كثيرة الاضلاع فمساحة جميع المثلثات أو كثيرة الاضلاع الكامل تساوى حاصل ضرب قواعد $دح$ و $ح ط$ و $ط د$ الخ أو محيط كثيرة الاضلاع \times في $\frac{1}{2} ق م$ يعنى نصف نصف القطر ويثبت المطلوب

(تنبيه) $ق م$ نصف قطر الدائرة المرسومة داخل كثيرة الاضلاع هو عين العمود النازل من المركز على أحد اضلاعه

* (الدعوى الثامنة النظرية) *

نسبة محيط الاشكال الكثيرة الاضلاع المتحد في عدد الاضلاع المنتظمة كنسبة أنصاف أقطار الدوائر المرسومة داخلها وخارجها * ونسبة سطوحها كنسبة مربعات تلك الأنصاف الأقطار

(شكل ١٦١) مثلاً إذا كان $ا$ - أحد أضلاع شكل منها ونقطة $هـ$ مركزه فخط $اهـ$ هو نصف قطر الدائرة المرسومة عليه وعود $هـ$ النازل على $ا$ - هو نصف قطر الدائرة المرسومة داخله * وأيضا إذا كان $دح$ ضلع كثيرة الاضلاع الأخر ونقطة $ط$ مركزه فيصير $ط د$ و $ط د$ نصفي قطر الدائرة الداخلة والخارجة ومن كون كل من $ا$ و $د$ نصف زاوية كثيرة الاضلاع فهما متساويتان وكذا زاويتا $ر$ و $ح$ مثلثا $ا ر هـ$ و $د ح ط$ يشابهان وكذا مثلثا $ا هـ$ و $د ط$ القائم الزاوية قصارت $ا$ - : $دح$:: $اهـ$: $د ط$:: $وهـ$: $ط د$ فعلم ان نسبة محيطي الشكلين كنسبة $اهـ$ و $د ط$ نصفي قطري الدائرتين المرسومتين عليهما وكنسبة $وهـ$ و $ط د$ نصفي قطري الدائرتين المرسومتين داخلهما

وحيث كانت نسبة كثيرى الاضلاع المذكورين كنسبة مربعى ضلعي ا-
و د ح المتناظرين ثبت المطلوب من أن تكون النسبة بينهما كالنسبة بين
مربعي ا هـ و د ط نصفي قطري الدائرتين المرسومتين خارجهما أ و كالنسبة
بين مربعي د هـ و ط نصفي قطري الدائرتين المرسومتين داخلهما وهو
المراد

(الدعوى التاسعة الفائدة)

(شكل ١٦٢) كل خط منحن أو متكسر كثرت اضلاعه محيط بخط ا م - المذهب
من نهايته الى الاخرى أطول من خط ا م - المحاط
فالمراد من المذهب هو الخط المنحنى او المتكسر الذى كثرت اضلاعه أو ما تركب
منهما وهو الذى لا يقطعه المستقيم الا في نقطتين اثنتين نقط ا م - اذا كان
مفتاريا او كان له اجزاء متداخلة فلا يعد محديا * لانه حينئذ يمكن ان يقطعه
المستقيم في اكثر من نقطتين واما محيط الدائرة فمذهب ولا يجرم * الا ان هذه
القضية لم يحتمس بحيط الدائرة فقط بل تشمل على كل خط وجدت فيه شروط
التحديب التي ذكرت

أقول ان لم يكن خط ا م - أصغر من كل ما أحاطه من الخطوط فلا بد أن يوجد
بين تلك الخطوط المحيطة خط أصغر من كل منها فيجب ان يكون ذلك الموجود اما
اصغر من خط ا م - واما ا و ب ا ل

مثلا اذا فرض خط ا و د هـ أصغر الخطوط المحيطة في رسم خط و د محاسن الخط
ا م - من أى جهة فخط و د المحاسن المرقوم يكون أصغر من خط و د هـ
لانه مستقيم وأقرب بعديين النقطتين * فاذا اخذ و د بدلا عن قسم و د هـ
نقط ا و د - يصير أصغر من خط ا و د - لكن قد فرض ان ا و د - اصغر
جميع الخطوط المحيطة فصار ذلك الفرض فاسدا لوجود ما هو اصغر منه ومن غنة
تبين ان خط ا م - اصغر من كل ما أحاطه

(شكل ١٦٣) تقيمه خط ا م - المحاط لا يزال أصغر من كل ما أحاطه سواء كان
مدورا كالشكل أو محاسن الخط و د المحيط المحاسن في نقطة د أو غير محاسن

به في نقطة ما وبينهما انفتاح دائر امداد وهو كما صرح به في هذه الدعوى
 * (الدعوى العاشرة القائمة) *

في كل دائرتين متصدي المركز يمكن ان يرسم على محيط الصغرى منها شكل كبير
 الاضلاع منتظم بشرط ان لا يلتقي بمحيط الكبرى وداخل الكبرى آخر بشرط
 ان لا يلتقي مع محيط الصغرى وعلى كل لاتزال اضلاع الشكل المرسوم واقعة بين
 محيطي الدائرتين

(شكل ١٦٤) مثلا اذا كان α و β نصفي قطري الدائرتين المقروضتين
 فيرسم خط $\alpha\beta$ المماس للمحيط الاصغر في نقطة γ المنتهي الى المحيط الاكبر
 بنقطتي δ و ϵ فعلى مائة قدم من الدعوى العملية اذا رسم في الدائرة الكبرى
 كثيرا اضلاع منتظم وقسمت الاقواس الموتره لاضلاعه الى اقسام متساوية
 ووصلت اوتارها فيحدث شكل كثيرا الاضلاع منتظم تضاعف عدد اضلاعه
 نظرا للاقل فاذا اجرى العمل على المتوال المحر ومثواليما يحدث قوس اصغر
 من قوس $\beta\gamma$ فاذا سمي هذا القوس الاصغر $\gamma\delta$ ووسطه ϵ ولبعد
 وتر $\gamma\delta$ عن المركزين وتر $\alpha\beta$ ظهر ان كثيرا الاضلاع المنتظم الذي ضلعه
 $\gamma\delta$ لا يلتقي بمحيط الدائرة التي نصف قطرها $\alpha\beta$ وكذا يجرى على الدائرة
 الصغرى فاذا وصل $\gamma\delta$ و ϵ فيتقاطعان بمماس $\delta\epsilon$ في نقطتي ζ
 و η فيصير كل ضلع كثيرا الاضلاع المرسوم على الدائرة الصغرى المشابه
 لكثيرا الاضلاع المرسوم داخل الدائرة الكبرى الذي ضلعه $\gamma\delta$

وحيث ان خط $\gamma\delta$ اصغر من خط $\gamma\epsilon$ ظهر ان كثيرا الاضلاع المرسوم على
 الدائرة الصغرى وضلعه كل لا يلاق محيط الدائرة الكبرى فلذا علم انه اذا
 أجرى العمل كما تقدم يمكن ان يرسم داخل الدائرة الكبرى شكل كثيرا الاضلاع
 منتظم بان يكون محيطه بين محيطي الدائرتين ويرسم آخر مشابه له على الدائرة
 الصغرى كما لا يخفى

تبينه يمكن ان يرسم جزء من كثيرا الاضلاع المنتظم داخل الاكبر قطاعي $\gamma\delta$ و $\gamma\epsilon$
 و $\delta\epsilon$ وآخر مشابه له على الاصغر بان يكون هذان الجزآن محاطين بين

المحيطين وفيه يكتفى بتقسيم قوس ودر الى اقسام ٢ و ٤ و ٨ و ١٦ الخ المتساوية متوالية حتى يصير القسم منه اصغر من قوس ودره وفي هذا الباب قسم المنتظم يطلق على الشكل الحاصل من احاطة نصفي قطر واوتار متساوية مرسومة من نهاية قوس ودر الى نهايته الاخرى وسميت تلك الاوتار المتساوية كلها اطرافا وازدخالا قسم المنتظم المرقوم هذا وان وجدت فيه خواص كثير الاضلاع المنتظم وهي تساوي الاضلاع والزوايا وامكان رسم محيط الدائرة داخل وخارجها لكن لا يطلق عليه انه قسم كثير الاضلاع الا اذا اشتغل محيط الدائرة على قوسه اشغالا تاما

• (الدعوى الحادية عشرة النظرية) •

(شكل ١٦٥) النسبة بين محيطي الدوائر كالنسبة بين انصاف أقطارها والنسبة بين سطوحها كالنسبة بين مربعات أنصاف أقطارها اقتصاوا للأفاد انبشار الى محيط الدائرة التي نصف قطرها ح محيط ط الى التي نصف قطرها ط محيط ط ط فعلى منطوق هذه الدعوى نصير نسبة محيط ح : محيط ط :: ح : ط

لانه ان لم يكن كذلك لكان الرابع المتناسب اكبرا واصغر من محيط ط مثلا اذا فرض انه اصغر منه بان تكون ح : ط :: محيط ح : محيط ط فاذ رسم كثيرا اضلاع المنتظم ه وركله داخل دائرة ط بان لا يتقاطع محيط دائرة ط وأيضاً رسم كثيرا اضلاع آخر م م م م م مشابها داخل دائرة ح فتكون النسبة بين مجموع اضلاع هذين المنتظمين كالنسبة بين ح و ط نصفي قطري الدائرتين المرسومين عليهما وذلك للتشابه بينهما اعني ان تكون م م م م م : ه وركه :: ح : ط لكن حيث فرضت ح : ط :: محيط ح : محيط ط ولتساوي النسب في هذين التماسين تكون م م م م م : ه وركه :: محيط ح : محيط ط وهذا خلاف • لانه يلزم من كون مجموع اضلاع م م م م م اصغر من محيط ح المرسوم عليه ان يكون مجموع ه وركه

ايضا أصغر من محيط ط و مستحيل ان يكون المحيط أصغر من المحيط فلذا
لا يمكن ان تكون نسبة ا الى ط ك نسبة محيط ا الى محيط أصغر
من محيط ط كما صرح به

وكذا لا يمكن ان تكون نسبة ا الى ط :: محيط ا : محيط أكبر من
محيط ط • لانه اذا جعلت النسبة عكسية وكانت نسبة ط الى ا
ك نسبة محيط ا أكبر من محيط ط الى محيط ا أو ك نسبة محيط ط الى
محيط أصغر من محيط ا كذلك يكون عين ما صرح به ومن غة لا يمكن أن تكون
نسبة نصف القطر الاول الى نصف القطر الثاني الا ك نسبة المحيط المرسوم بنصف
القطر الاول الى المحيط المرسوم بنصف القطر الثاني ولا محالة لما ثبت في الشطر
الاول من هذه الدعوى ومن أجل ذلك استحال ان يكون الحد الرابع من تناسب
ا : ط :: محيط ا : س أكبر أو أصغر من محيط ط وثبت
المطلوب من ان تكون نسبة المحيط الى المحيط ك نسبة نصف القطر الى نصف القطر
وحيث ان الشطر الثاني من هذه الدعوى اشباهه عين الاول وكذا النتيجة
الاثبتة حلها واشتاتم افلا حاجة لتفصيل آخر في هذا الباب

نتيجة (شكل ١٦٦) النسبة بين قوسى ا - و ده المتشابهين كالنسبة بين
نصفى قطرى ا ح و د ط والنسبة بين قطاعى ا ح - و د ط ه المتشابهين
ك نسبة مربعهما

لان من تشابه القوسين يلزم ان تكون زاوية ح مساوية لزاوية ط (حد
٣ مقالة ٣) ف نسبة زاوية ح الى أربع قوائم ك نسبة قوسى ا - الى محيط
ا الكامل (١٧ مقالة ٢) وأيضا نسبة زاوية ط الى أربع قوائم ك نسبة
قوسى و ه الى محيط ط و فعلم ان النسبة بين قوسى ا - و ه كالنسبة
بين محيطهما وعلى ما صرح به آتفا النسبة بين المحيطين كالنسبة بين نصفى قطرى
ا ح و د ط

فظهر ان نسبة قوسى ا - : قوسى و ه :: ا ح : د ط
وبمثل هذا ثبت ان النسبة بين قطاعى ا ح - و د ط ه كالنسبة بين الدائرتين

الكاملين * وحيث ان النسبة بين الدائرتين كالنسبة بين مربعي نصفي القطرين

$$\text{صار نسبة قطاع } \alpha\gamma : \text{قطاع } \delta\epsilon :: \alpha\gamma^2 : \delta\epsilon^2$$

(الدعوى الثانية عشرة النظرية) *

مساحة الدائرة تساوي حاصل ضرب محيطها بنصف نصف قطرها

(شكل ١٦٧) فاختصارا للافادة اذا أشير الى مساحة الدائرة التي نصف

قطرها α بمساحة α ومحيطها بمحيط α فعلى منطوق الدعوى مساحة

$$\alpha = \frac{1}{2} \alpha \times \text{محيط } \alpha \quad * \text{ لانه ان لم يكن حاصل } \frac{1}{2} \alpha \times \text{محيط } \alpha$$

α مساحة للدائرة التي نصف قطرها α يلزم ان تكون مساحة الدائرة أصغر

أو أكبر من تلك الدائرة

أولاً لو فرض انه مساو لمساحة دائرة أكبر منها ملا كان $\frac{1}{2} \alpha \times \text{محيط } \alpha$

$$= \text{مساحة } \gamma\delta \text{ أعنى دائرة نصف قطرها } \gamma\delta \text{ فاذا رسم كثيرا الاضلاع}$$

$\delta\epsilon\zeta\eta$ وهو α المتظم على محيط α بان لا يتقاطع بمحيط $\gamma\delta$ فمساحة ذلك

المتظم تساوي حاصل ضرب مجموع اضلاعه $\delta\epsilon + \epsilon\zeta + \zeta\eta + \eta\delta$ و α

بقدر $\frac{1}{2} \alpha$ لكن حيث ان كثيرا الاضلاع أحاط بمحيط الدائرة التي رسم عليها

من كل جانب وقد تقدم ان كل محيط أكبر من كل محيط فمساحة كثيرا الاضلاع

$\delta\epsilon\zeta\eta$ أكبر من حاصل $\frac{1}{2} \alpha \times \text{محيط } \alpha$ الذي فرض انه مساو

لمساحة الدائرة التي نصف قطرها $\gamma\delta$ فلزم أن يكون كثيرا الاضلاع المرسوم أكبر

من الدائرة التي أحاطت به وهو محال فلذا حاصل $\frac{1}{2} \alpha \times \text{محيط } \alpha$ ثبت

انه لا يكون أعظم من مساحة α يعنى لا يكون حاصل ضرب محيط الدائرة

بنصف نصف قطرها أكبر من مساحتها كما لا يخفى

ثانياً لا يمكن أن يكون $\frac{1}{2} \alpha \times \text{محيط } \gamma\delta$ مساحة دائرة أصغر منها

اختصارا لتجعل دائرة $\gamma\delta$ هي المفروضة

فان قيل يمكن أن يكون $\frac{1}{2} \alpha \times \text{محيط } \gamma\delta = \text{مساحة } \alpha$ فيجوز

العمل على ما تقدم ويرسم كثيرا الاضلاع $\delta\epsilon\zeta\eta$ وهو α المتظم فمساحة حاصل

ضرب $(\delta\epsilon + \epsilon\zeta + \zeta\eta + \eta\delta)$ $\times \frac{1}{2} \alpha$ لكن حيث ان مجموع

اضلاع د ه + ه و + و ر + الخ أصغر من محيط د - المحيط به
 يلزم ان تكون مساحة كثير الاضلاع أصغر من حاصل $\frac{1}{4} \times ١٦$ محيط د -
 وأيضا يجب ان تكون أصغر من مقدار $\frac{1}{4} \times ١٦$ محيط د - واذا
 فرض انه مساو لمساحة الدائرة التي نصف قطرها د - فعلى هذا يلزم ان يكون
 كثير الاضلاع أصغر من الدائرة التي أحاط بها وهذا باطل محض ومن ثمة تحقق
 ان حاصل ضرب محيط دائرة في نصف نصف قطرها لا يكون مساويا لمساحة دائرة
 أصغر منها فسلم ان حاصل ضرب محيط الدائرة بنصف نصف قطرها يساوي
 مساحتها قطعا وثبت المطلوب

(نتيجة ١) (شكل ١٦٨) مساحة قطاع الدائرة مساوية لحاصل ضرب قوسه
 بنصف نصف قطره

لان نسبة قطاع ا ر د الى الدائرة الكاملة كنسبة قوس ا م ر الى محيط
 ا ر د الكامل (١٧ مقالة ٢) أو كنسبة قوس ا م ر $\times \frac{1}{4} \times ١٦$ الى محيط
 ا ر د $\times \frac{1}{4} \times ١٦$ وحيث ان مساحة الدائرة = محيط ا ر د $\times \frac{1}{4} \times ١٦$
 تبين ان مساحة قطاع ا ر د أيضا = ا م ر $\times \frac{1}{4} \times ١٦$

(نتيجة ٢) اذا رمز الى محيط الدائرة التي قطرها واحد بحرف ط ولو حفظ ان
 نسبة المحيطين كنسبة نصفي قطريهما أو قطريهما فقلد ~~ب~~ كن وضع ما سمي
 من التناسب اعني نسبة قطر ا الى محيطه ط كنسبة قطر ٢ د الى محيط
 الدائرة التي نصف قطرها ا د

يعني (شكل ١٦٥) ١ : ط :: ٢ : محيط د فعلى هذا محيط د
 $= \frac{٢ \times ط}{١} = ٢ \times ط$ فاذا ضرب كل من هذين المتساويين في

$\frac{1}{4} \times ١٦$ بصير محيط د $\times \frac{1}{4} \times ١٦ = ط \times \frac{٢}{١} \times ١٦$ أو مساحة د = ط

$\times \frac{٢}{١}$ فلذا ظهر ان تكون مساحة الدائرة مساوية لمربع نصف قطرها مضروبا
 في عدد ط وهو محيط الدائرة التي قطرها واحد وتكون مساوية لحاصل ضرب
 مربع نصف القطر فيما بين القطر والمحيط من النسبة كما لا يخفى

وكذلك مساحة الدائرة التي نصف قطرها $ور = ط \times ور$ لكن
حيث ان النسبة بين مقداري $ط \times آ$ و $ط \times ور$ كنسبة $آ$ الى
 $ور$ صارت $ط \times آ : ط \times ور :: آ : ور$ فنظر الهـذا
التناسب بين أن النسبة بين مساحي الدوائر كنسبة مربعات أنصاف أقطارها
وفيه تصديق كاف ووافق شاف للدعوى التي تقدمت

تبيحه مسئلة ترييع الدائرة كناية عن اعمال مربع مكاف لدائرة نصف قطرها
معلوم وقد بين ذلك هنا وثبت ان مساحة الدائرة تكافى المستطيل الحاصل
من ضرب محيطها بنصف نصف قطرها ولا يجرم انه يمكن تحويل هذا المستطيل
الى مربع باستخراج الوسط المناسب بين البعدين المرقومين (٦ مقالة ٣)
فعلم ان مسئلة ترييع الدائرة لاتوقف الاعلى استخراج مقدار محيط الدائرة
المعروفة القطر فقط في وجود النسبة بين نصف القطر أو القطر وبين المحيط كفاية
لاستخراج ذلك

الى الان لم يكن استخراج هذه النسبة على طريق التحقيق وانما صار
استخراجها على سبيل التقريب ولكن بطريق حساب المتواليات والكسور
المتسلسلة صارت تلك النسبة في اقصى درجة من التقريب بحيث لو وجدت
النسبة الحقيقية فلا غرة فيها وقبل ان يعلم حساب المتواليات على وجه الاتقان
كان المهندسون المتقدمون بصرفون الازدهان ما استطاعوا في حل هذه المسئلة
ولان صارت في حيز الاهمال ولكن لاجل تدريب اذهان المبتدئين وتوسيع
مبادي افكارهم اجتمع من المهندسين المتقدمين مهندس يسمى ارشميد
فاظهر واثبت ان النسبة بين محيط الدائرة وقطرها هي $\frac{1}{\sqrt{3}}$ او $\frac{1}{\sqrt{3}}$
يعنى $\frac{1}{\sqrt{3}}$ او $\frac{1}{\sqrt{3}}$ وهو ما رمزنا له بحرف $ط$ وهو محيط الدائرة التي قطرها
واحد وحيث ان اول كسر من هذين الكسرين اسهل ما يكون صارا استعماله
جاريما ومن المتقدمين مهندس يسمى ميسوس استخراج مقدار هذه النسبة

اشد قربا مما ذكر وهو $\frac{300}{113}$ وبالجملة استخراج معرفة قيمته من معنى الخلف مقدار
ط بطريق الكسور والاعشارية وقد موها الى درجة التقريب ما استطاعوا
حتى وصلوا الى هذه الاعداد

٣٠٨٩٧٩٣٢ و١٤١٥٩٢٦٥٣٠٨٩٧٩٣٢ وقد موها هذا الكسر الى خانة المائة
والعشرين وخانة المائة والاربعين وهذه الكسور التي تقدمت الى هذه الدرجة
حصل بها التقريب الكلي كما لا يخفى ولا جرم ان في استخراج جذر العدد الاصم
لم يعلم اكثر مما ذكر حتى ان حضرة علي رضي الله تعالى عنه وكرم الله
تعالى وجهه حين سئل عن جذر العدد الاصم اهو موجود ام لا فقال لا يعلم
جذرا للاصم الا هو • وقال بعضهم ان هذا الكلام لم يصدر عن علي رضي
الله تعالى عنه حيث ان جذرا للاصم لا وجود له حتى ان عليا رضي الله تعالى
عنه يقول ان الله تعالى يعلم فعل هذا الوجه يعلم ان هذا الكلام لم ينقل
عن علي ولا عن غيره من اهل التوحيد لانه محض كفر لاسناد الجهل المركب له
تعالى وتنزهه ولا ناعن كل وصف لا يليق به واما حضرة بوقعالي زاده محمد عاطف
افندي احدث سراج الكتاب المشهور بخلاصة الحساب تاليف حضرة السيد بهاء
الدين العاملي فقال ان هذا الكلام يحتمل انه عن علي رضي الله تعالى عنه وانه
يمكن تاويله بان يقال لا يعلم احد جذرا للاصم اهو موجود ام لا الا هو • وبهذا
التوجيه لا كفر ولا اعتراض • وقال حضرة الخبر الا كبير مترجم اصل هذا
الكتاب من غير تاويل ليس في كلام علي كفر ولا اعتراض لان الكسور المتسلسلة
كلمات عبرت على التوالي تكون في منزلة التقريب من التحقيق وحيث ان لا طاقة
لبشر ان يصل الى نهاية الكسور ولو بذل غاية جهده والاشياء التي
لا تنتهي لها دين علمه تعالى وكل ما كان مخصوصا بعلمه تعالى ولا قدرة لبشر
ان يصل الى غايته فهو مقوض له تعالى وباب الاعتراض مسدود كما لا يخفى على
اولي الالباب

• (الدعوى الثالثة عشرة العمالية) •

طريق استخراج سطح كثير الاضلاع المنتظم المرسوم داخل الدائرة وخارجها

عدد اضلاع ضعف عدد اضلاع الكثير الاضلاع المرسوم داخل الدائرة
وخارجها المتشابهين المعلومين

(شكل ١٦٩) مثلا اذا كان a ضلع كثير الاضلاع المرسوم داخل الدائرة
وكان هو الموازي لـ ضلع b كثير الاضلاع المرسوم خارجها المتشابهة
وكانت نقطة c مركز تلك الدائرة ووصل وتر am ونقطا al و sk
المماسين فوتر am يكون ضلع كثير الاضلاع المرسوم داخل الدائرة
المضاعف الاضلاع عددا l لك الذي هو ضعف m هو ضلع كثير الاضلاع
المشابهة المرسوم على تلك الدائرة فاذا علمت ذلك يمكن اجراء العمل كاذ كر في زاوية
 a am على سائر الزوايا الاخرى التي تساويها وفي هذه الاجراء يمكن بما صرح به
في تلك الزاوية والنسبة بين ما اشقت عليه هذه الزاوية من المثلثات كالتاليين
كثيري الاضلاع التي تكون تلك المثلثات اقسامها

فاذا سميت مساحة كثير الاضلاع المرسوم داخل الدائرة الذي ضلعه a مساحة
 a ومساحة كثير الاضلاع المرسوم على الدائرة مشابها له مساحة b ومساحة
الذي ضلعه m المرسوم داخل الدائرة مساحة l ومساحة المشابهة المرسوم
على الدائرة na فعلى منطوق الدهوى حيث ان a و b معاومان وجب
استخراج a و na

آلا لا اشتراك رأس مثلثي a و am في نقطة a واتحاد الارتفاع فتكون
النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما a و am وايضا النسبة بين هذين
المثلثين كالنسبة بين كثيري الاضلاع a و l الذين كان ذاك المثلثان قسميهما فلذا
صار $a : l :: a : am$ وكذلك لا اشتراك m رأس مثلثي am و
 am تكون النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما am و ah وايضا
نسبة هذين المثلثين كالنسبة بين كثيري الاضلاع am و b فلذا كانت $am : b ::$
 $a : l$ و $ah : b :: am : l$ لكن لتوازي خطي ah و am تكون $ah : am ::$
 $ah : b :: am : l$ و لتساوي النسب في هذا وفي التناسب الذي سبق تكون a
 $am : b :: a : l$ و حيث ان a احد كثيري الاضلاع المطولين واه وسط

متناسبين $ا و -$ ويهدا صار $آ = ا \times ١٧ -$ ونعين
 ثانياً لاشترائك ارتفاع $ح م$ في مثلثي $ح ل م و ح ل ه$ تكون نسبتهما
 كنسبة قاعدتيهما $ل م و ل ه$ وحيث نصف زاوية $م ح ه$ بنظر
 ح ل تكون $ل م : ل ه :: ح م : ح ه :: ح ا : ح ه :: ١٧ : ١٢ ::$
 $١ : آ$ فلذا صار $ح ل م : ح ل ه :: ١ : آ$ وبطريق التركيب أيضاً
 تكون $ح ل م : ح ل م + ح ل ه أو ح م ه :: ١ : آ + ١$ *
 لكن نسبة $ح م ل ا$ أو $ح م ل و ح م ه$ كنسبة $يا و -$ اللذين
 كان ذاك المثلثان قسيعهما ومن غة كانت $نا : - :: ١٢ : ١٧ ::$
 $١ + آ$ * وإذن تعين مقدار $آ$ وبهذا التناسب يتعين أيضاً مقدار
 $نا$ فلذا $نا = \frac{١٢ \times ١٧}{١ + ١}$ ومن غة صار استخراج $آ و نا$ كثيرى الاضلاع
 اللذين عدداضلاعهما مضاعف بواسطة كثيرى الاضلاع $١ و -$ المعالومين
 على اسهل طريق

(الدعوى الرابعة عشرة العملية) *

طريق استخراج النسبة التقريبية بين محيط الدائرة وقطرها اذا فرض ان نصف
 قطرها $= ١$ يكون ضلع المربع المرسوم داخل الدائرة $= ٢ \sqrt{٢}$
 وحيث ان ضلع المربع المرسوم على الدائرة مساو لقطرها يصير $٢ =$ فعلى
 هذا مساحة المربع المرسوم داخل الدائرة $= ٢$ ومساحة المربع المرسوم
 عليها $= ٤$ فلذا $١ = ٢$ و $- = ٤$ فعلى ما ذكر في الدعوى
 العملية المتقدمة مساحة المثلث المرسوم داخل الدائرة المسمى $آ =$
 $٢ \sqrt{٢} \times ١٧ = ٨ \sqrt{٢} = ٢٨٢٨٤٢٧١$ ومساحة المثلث المرسوم
 على الدائرة المفروض $با = \frac{٤ \times ٢ \times ٢}{٨ \sqrt{٢} + ٢} = \frac{١٦}{٨ \sqrt{٢} + ٢} = ٣٠٣١٣٧٠٨٥$
 وحيث ان مساحة المثلث المرسوم داخل الدائرة وخارجها معلومة توجد
 بواسطة قلم مساحة كل من كثير الاضلاع المضاعف عدداضلاعهما على
 الستة عشر لهما انصاعدا * ولجل اجراء العمل على النسق المذكور يفرض
 مجددا ان مساحة $١ = ٢٨٢٨٤٢٧١$ و $- = ٣٠٣١٣٧٠٨٥$ فعلى

٣,١٤٤١١٨٤	—	٣,١٣٦٥٤٨٥	—	٠٠٦٤
٣,١٤٢٢٢٢٦	—	٣,١٤٠٣٣١١	—	٠٠١٢٨
٣,١٤١٧٥٠٤	—	٣,١٤١٢٧٧٢	—	٠٠٢٥٦
٣,١٤١٦٣٢١	—	٣,١٤١٥١٣٨	—	٠٠٥١٢
٣,١٤١٦٠٢٥	—	٣,١٤١٥٧٢٩	—	٠١٠٢٤
٣,١٤١٥٩٥١	—	٣,١٤١٥٨٧٧	—	٠٢٠٤٨
٣,١٤١٥٩٢٣	—	٣,١٤١٥٩١٤	—	٠٤٠٩٦
٣,١٤١٥٩٢٨	—	٣,١٤١٥٩٢٣	—	٠٨١٩٢
٣,١٤١٥٩٢٧	—	٣,١٤١٥٩٢٥	—	١٦٣٨٤
٣,١٤١٥٩٢٦	—	٣,١٤١٥٩٢٦	—	٣٢٧٦٨

فظهر من الحساب المرقوم ان مساحة الدائرة = ٣,١٤١٥٩٢٦ فثبت
 صارت تقديم الكبير الاشارة الى صابع خلة وترك البواقي حسب الكسور
 بزيادة ترقيم خلة ليكون حاصل الحساب مقرونا بالقيمة وواصل الى الحقيقة
 عند منتهى الخانات لئلا يكون للشبهة مجال في صحة الحساب

وحيث كانت مساحة الدائرة مساوية لحاصل ضرب نصفه نصف قطرها
 بالمحيط تبين انه اذا كان نصف قطرها واحدا فنصف المحيط =
 ٣,١٤١٥٩٢٦ وان كان قطرها واحدا فالمحيط = ٣,١٤١٥٩٢٦
 فظهر ان مقداره الذي هو اقرب نسبة القطر الى المحيط كما سبق
 = ٣,١٤١٥٩٢٦ وثبت المطلوب

• (الدعوى الخامسة عشرة القاعدة) •

(شكل ١٧٠) اذا كان ضلع γ هـ المساوي لضلع δ في مثلث $\delta\gamma\epsilon$
 المتساوي السابقين المشترك في رأس γ بمثلث γ اـ وسطا متناسبا بين
 ضلعي γ اـ و δ — فالمثلثان المرقومان يكونان متكافئين وما عدا هذا
 اذا كانت زاوية γ اـ قائمة فعمود δ و ϵ النازل على قاعدة المتساوي
 السابقين يكون وسطا متناسبا بين ضلعي γ اـ و δ وبين نصف مجموع ضلعي γ اـ و

و

اولا حيث ان زاوية γ مشتركة تكون نسبة مثلث $\alpha\beta\gamma$ الى مثلث $\alpha\delta\epsilon$ متساوي الساقين $\alpha\beta = \alpha\delta$ كنسبة مستطيل $\alpha\delta \times \gamma$ الى مستطيل $\alpha\gamma \times \delta$

$\times \delta$ او كنسبة $\frac{\gamma}{\delta}$ (٢٤ مقالة ٣) وفي هذه الاربعة المتناسبة

مقي كان $\frac{\gamma}{\delta} = \alpha \times \gamma$ اعني ان يكون δ وسطا متناسبا بين ضلعي $\alpha\delta$ و γ تبين ان يكون مثلثا $\alpha\delta\gamma$ و $\alpha\delta\epsilon$ متكافئين لان تساوي حدى النسبة الثانية يستلزم تساوي حدى النسبة الاولى لماعلم من خواص التناسب

ثانيا يلزم من تقسيم عمود $\gamma\delta$ لزاوية $\alpha\delta$ الى قسمين متساويين ان تكون $\alpha\delta : \delta\gamma :: \alpha\delta : \gamma$ (١٧ مقالة ٢) وايضا بطريق التركيب تكون $\alpha\delta : \alpha\gamma :: \alpha\delta : \delta\gamma$ او $\alpha\delta : \alpha\gamma :: \alpha\delta : \delta\gamma$ لكن حيث ان نسبة $\alpha\delta$ الى $\alpha\gamma$ كنسبة مثلث $\alpha\delta\gamma$ الى مثلث $\alpha\delta\epsilon$ او $\gamma\delta$ ولوجود النسبة المشتركة في هذين التناسبين صارت $\alpha\delta : \alpha\gamma :: \alpha\delta : \delta\gamma$ مثلث $\alpha\delta\gamma : \delta\gamma ::$ مثلث $\alpha\delta\epsilon : \gamma$ وان كانت زاوية α قائمة فثباته مثلثي

$\alpha\delta\gamma$ و $\delta\gamma\epsilon$ تكون $\alpha\delta\gamma : \delta\gamma :: \alpha\delta : \gamma$ او $\alpha\delta\gamma : \delta\gamma :: \alpha\delta : \gamma$

$\gamma\delta\epsilon : \delta\gamma :: \alpha\delta : \gamma$ ولوجود النسبة المشتركة في هذين التناسبين

ايضا تكون $\alpha\delta : \gamma :: \alpha\delta : \gamma$ او $\alpha\delta : \gamma :: \alpha\delta : \gamma$ فاذا ضربت

الناتجة من هذا التناسب في مقدار $\alpha\delta$ يتساوى مقدما هاتين تساوي

تاليهما فلذا صار $\alpha\delta = \frac{\alpha\delta}{\gamma} \times (\alpha\delta + \gamma)$ او $\alpha\delta = \frac{\alpha\delta}{\gamma} \times (\alpha\delta + \gamma)$

فظهر من هذا المساواة انه مقي كانت زاوية α قائمة يكون عمود $\gamma\delta$ وسطا متناسبا بين ضلع $\alpha\delta$ ونصف مجموع ضلعي $\alpha\delta$ و γ وبه ثبت المطلوب

• (الدعوى السادسة عشرة العملية) •

طريق استنباط دائرة من شكل كثير الاضلاع منتظم معلوم قدر ما يراد بان يكون التفاوت بينهما قليلا
(شكل ١٧١) مثلا اذا كان $م$ $د$ $ف$ مربعا معلوما ينزل عمود $ا$ من مركز $د$ على ضلع $م$ ويوصل $د$ $ه$ • فالدائرة المرسومة بنصف قطر $ا$ هي الدائرة المرسومة داخل المربع والمرسومة بنصف قطر $د$ $ه$ هي المرسومة عليه

فالدائرة الاولى اصغر من المربع والثانية اكبر منه فيجب تعيين هذه الحدود فيؤخذ $د$ $ه$ و $د$ $و$ متساويين بان يكون كل منهما وسطا متناسبا بين $ا$ و $د$ فاذا وصل $د$ $ه$ فثلث $د$ $ه$ الحادث المتساوي الساقين يكافئ مثلث $د$ $ا$ $و$ وهكذا اذا اجري العمل على الثلثات المتماثلة المرسومة منها المربع يحدث مثنى منتظم يكافئ مربع $م$ $د$ $ف$ والدائرة المرسومة بنصف قطر $د$ $و$ الوسطا تناسب بين مقسداى $ا$ و $د$ $ا$ $و$ هي الدائرة المرسومة داخل المثلث المرقوم والمرسومة بنصف قطر $د$ $و$ هي المرسومة على المثلث المذكور فالدائرة الاولى اصغر من المربع والثانية اكبر منه فعلى المتوالى المهر واذا تحول مثلث $د$ $و$ قائم الزاوية الى مثلث متساوى الساقين مكافئ له حينئذ يحدث الشكل المنتظم ذو الستة عشر ضلعا مكافيا للمربع المفروض ولا تزال الدائرة المرسومة داخله اصغر من المربع المرقوم والمرسومة عليه اكبر

وصككنا حتى نصير النسبة التى بين نصف قطر الدائرة الداخلة والخارجة جزءا غير محسوس وحيث يمكن اجراء العمل على التوالى كما ذكر حتى يوصل به الى درجة المساواة بين نصفي القطر من الداخلة والخارجة فيصير ما كان مرسوما داخل الدائرة وخارجها مكافيا للمربع المعلوم

• (تبيه) • يذكر في هذا المجل ما ينتج ويختصر من البحث والنظرى على التوالى عن تقرب انصاف الاقطار

مثلا اذا كانت $\frac{1}{2}$ نصف قطر الدائرة المرسومة داخل احد المنتظمين المستخرجين و $\frac{1}{2}$ نصف قطر الدائرة المرسومة عليه وكانت $\frac{1}{2}$ نصف قطري الدائرتين المرسومين داخل وخارج كثير الاضلاع المضاعف الذي يلي الاولين فعلى ما ثبت آتباعا ان مقدار $\frac{1}{2}$ يكون وسطا متناسبا بين $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ مقدار ايضا يكون وسطا متناسبا بين مقدارى $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ ومن ثمة يكون $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ فعلى هذا متى علم مقدار $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ نصف قطري كثير الاضلاع بعلم $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ نصف قطر كثير الاضلاع اللذان يليان الاولين بسهولة • فاذا اجرى العمل على الوجه المشروح حتى يصير الفرق بين نصف القطر غير محسوس فيصير كل واحد منهما نصف قطر الدائرة المكافية للمربع أو كثير الاضلاع المقروض اسكن اجراء هذه الطريقة بالخط اسهل • لانه عبارة عن استخراج الوسط المناسب على التوالي بين خطين معلومين ولا يجرى اعماله بالاعداد أفيد

واستخراج نسبة القطر الى المحيط بطريق أصول الهندسة اسهل من ذلك كله مثلا اذا كان ضلع المربع $= 2$ يكون $\frac{1}{2}$ نصف القطر الاول المرسوم داخلا $= 1$ ويكون $\frac{1}{2}$ نصف القطر الاول المرسوم خارجا $= \frac{1}{2}$ او $\frac{1}{2}$ فمضى كان $\frac{1}{2} = 1$ و $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ فبكون $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ فعلى ما صرح به في أصول المتوالية تستعمل هذه الاعداد في استخراج ما سيبقى من الاعداد اللاحقة وههنا رقت نتائج الحساب الى سابع وثامن خاتمة من الارقام بواسطة جداول اللغايرة العادية

انصاف اقطار الدوائر المرسومة داخلا	انصاف اقطار الدوائر المرسومة خارجا
١ و ٠.٠٠٠٠٠٠	١ و ٤١٤٣١٣٦
١ و ٠.٩٨٦٨٤١	١ و ١٨٩٢٠٧١
١ و ١.٤٣٠٠٠٠	١ و ١٢١٠٨٦٢

١٢٦٥٦٣٩ و ١٢٦٥٦٣٩ و ١٢٦٥٦٣٩

١٢٧٩٢٥٧ و ١٢٧٩٢٥٧ و ١٢٧٩٢٥٧

١٢٨٢٦٥٧ و ١٢٨٢٦٥٧ و ١٢٨٢٦٥٧

نظر لهذا الخلل تساوت واتحدت انصاف الاقطار الاول من الطرفين خصوصا اذا أخذ الوسط المناسب بالنسبة العددية مكان ما يؤخذ بالنسبة الهندسية فبهذه الطريقة تسهل عملية الحساب وان وجد في بعض فرق في او اخر اختلافات فانه جبر صغير محسوس وقد رقت ههنا نتائج تلك العملية

١٢٨٤٣٦٠ و ١٢٨٤٣٦٠ و ١٢٨٤٣٦٠

١٢٨٣٩٣٤ و ١٢٨٣٩٣٤ و ١٢٨٣٩٣٤

١٢٨٣٨٢٧ و ١٢٨٣٨٢٧ و ١٢٨٣٨٢٧

١٢٨٣٨٠١ و ١٢٨٣٨٠١ و ١٢٨٣٨٠١

١٢٨٣٧٩٤ و ١٢٨٣٧٩٤ و ١٢٨٣٧٩٤

١٢٨٣٧٩٢ و ١٢٨٣٧٩٢ و ١٢٨٣٧٩٢

فهذا العدد ١٢٨٣٧٩٢ هو اقرب بنسبة لنصف قطر الدائرة التي تساوى مساحة المربع الذي ضلعه اثنان وبذلك صار وجود نسبة القطر الى المحيط اسهل * وحيث تقدم ان مساحة الدائرة تساوى تربيع نصف القطر مضروبا في عدد ط فاذا قسمت مساحة ط على مربع هذا العدد ١٢٨٣٧٩٢ يخرج مقدار ط فاذا حسبنا ظهر هذا الرقم الخ ١٤١٥٩٢٦ وهو عين ما قد وجدنا بالوجه الاخر فيما تقدم

ملحقات المقالة الرابعة

حد ١ بين المقادير المتعددة الجنس يقال لالاكبر اعظمها ويقال للاصغر اصغرهما فقطر الدائرة هو اعظم خط واصل بين نقطتي محيط الدائرة والعمود هو اصغر خط واصل بين نقطة مفروضة وخط معلوم

حد ٢ الاشكال المتساوية المحيط جمعا تسمى متساوية الاطراف

(الدعوى الاولى النظرية)

اعظم المثلثان المتحدان القاعدة المتساوية الاطراف ما كان ضلعاهما سوى القاعدة
متساويين اعني ان ما رسم فوق القاعدة متساوي الساقين اعظم

(شكل ١٧٢) مثلا اذا كان $ا د = ح ر$ و $ا م + م ر = ا ح + ح ر$
 $ح ر$ مثلث $ا ح ر$ المتساوي الساقين اكبر من مثلث $ا م ر$ الذي قطعه
 عين قاعدته واطرافه مساوية لاطرافه فاذا جعلت نقطة $ح$ مركزا ورسم محيط
 ينصف قطر $ا ح$ المتساوي $ح ر$ فيلتقي هذا المحيط بنقطة $د$ الخارج في نقطة
 $د$ ويوصل $د ر$ فزاوية $د ر ا$ المرسومة في نصف الدائرة تصير قائمة
 (٥١ مقالة ٢) ويتمد عود $د ر$ جهة $د$ ويؤخذ $م د = م ر$ ويوصل
 $ا د$ ثم ينزل عودا $م ف$ و $د ر$ على $د$ من تقاطع $م و د$ ومن كون
 $د = ح ر$ و $م د = م ر$ يكون $ا د + ا ح = ا ح + ح ر$ و $ا م + ا م$
 $+ م ر = ا م + م د$ واذ فرض ان $ا ح + ح ر = ا م + م ر$
 $م ر$ كان $ا د = ا م + م د$ فصار مثل $ا د <$ مائل $ا د$ فهو
 ابعده من عود $ا ر$ فلذا صار $د ر <$ او $د ر$ نصف $د ر$
 اكبر من $ر ف$ نصف $د ر$ (١٢ مقالة ١) ولكن نسبة مثلثي $ا ر د$
 و $ا م ر$ متحدى القاعدة $ا ر$ كنسبة ارتفاعيهما $د ر$ و $ر ف$ وحيث
 ان $د ر <$ $ر ف$ ثبت المطلوب ان يكون مثلث $ا ر د$ المتساوي الساقين
 اعظم من مثلث $ا م ر$ ما ليس متساوي الساقين مع اقله القاعدة وتساوي
 الاطراف قيمها

• (الدعوى الثانية النظرية) •

اعظم الاشكال الكثيرة الاضلاع المتحد عدد اضلاعها المتساوية الاطراف
 ما كانت اضلاعه متساوية

(شكل ١٧٣) لانه اذا كان $ا ر د$ و $د ه و$ اعظمها ولم يكن ضلع $ر د$
 مساويا للضلع $د ه$ ينشأ مثلث $ر د ه$ متساوي الساقين فوق قاعدة
 $ر د$ على ان يكون متساوي الاطراف بمثلث $ر د ه$ مثلث $ر د ه$
 المرقوم يكون اكبر من مثلث $ر د ه$ فلزم ان يكون ~~متساويا~~ الاضلاع

أر ع وهو أكبر من كثيرى الأضلاع أر د وهو وحيث لم يكن أر د هو
اعظم كثيرى الأضلاع المرقومة وهذا بخلاف ما قد فرضناه فلذا ثبت المطلوب
من أن يكون $ر = د$ في الأعظم وبمثل هذا يثبت أن $د = هـ$
و $هـ = هـ$ هو الخوان الأعظم هو ما تساوت أضلاعه

• (الدعوى الثالثة النظرية) •

(شكل ١٧٤) كافة المثلثات المرسومة بضلعين معلومين يحدث بينهما زاوية حينما
اتفق أعظمها ما كان بين ضلعيه المعلومين زاوية قائمة

مثلا إذا كان أر د و أر د مثلثين وضلع أر مشترك بينهما وضلع أر
مساوي بالضلع أر وزاوية أر قائمة أقول أن مثلث أر د القائم الزاوية
اعظم من مثلث أر د الذى كانت زاويته أ حادة أو منفرجة • الاشتراك
قاعدة أر بين المثلثين المرقومين كانت النسبة بينهما كالنسبة بين ارتفاعيهما
أ د و هـ ولكن حيث أن عمود د هـ أصغر من مائل د أ المساوى أ د
فعلى مقتضى التناسب صار مثلث أر د أصغر من مثلث أر د وثبت
المطلوب

• (الدعوى الرابعة النظرية) •

اعظم كثيرى الأضلاع المرسومة بأضلاع معلومة سوى ضلع آخر صار قطرا
لمخطط دائري في جميع زواياه

(شكل ١٧٥) مثلا إذا كانت أضلاع أر د و د هـ و هـ د و هـ د
معلومة وكان أر د هو اعظم كثيرى الأضلاع المرسومة بها وضلع أ د غير
محدد ووصل أ د و د أقول أن لم تكن زاوية أ د قائمة يضم إلى
قسمى د هـ و هـ د مثلث أ د و بان تجعل زاوية أ د قائمة وهما باقيان
على حالهما

وحيث أن هذا المثلث القائم الزاوية أكبر من المثلث المقدم فكانه ضم إلى كثير
الأضلاع المقروضا أكبر من قدر زاوية خلف المقروضا فلذا علم أن كثير الأضلاع
المرقوم لا يمكن أن يكون أعظم أصحابه ما لم تكن زاويته أ د قائمة وإثبات

عظمه يستلزم قيام سائر زواياه $ا د و$ و $ا ح و$ و $ا ه و$ ومن ثمة ثبت المطلوب
من ان يمر نصف المحيط المرسوم بنصف قطر $ا د$ الغير المحدود بجميع زواياه
 $ا و س و ج و د و ه و و$ وان الاعظم ما يمر بالمحيط المرسوم سائر
زواياه

تنبيه رد سؤال وهو انه يمكن رسم كثير الاضلاع بطرائق متعددة بواسطة تلك
الاضلاع المعلومة ويمر بزواياه نصف المحيط المتساوي الضلع الاخير المجهول مقداره
مثل (شكل ١٧٦) يعني ان $ا س$ يوتر الاقواس المرسومة بنصف قطري $ا ح$
و $ا د$ المختفين هذا ولكن لاتزال اصغر الزوايا المركزية المستندة الى الوتر
المرسوم واقعة في الدائرة التي نصف قطرها $ا ح$ فلتا صارت $ا ح > ا د$
وحيث ان زاوية $ا د ه = ا ح د + ح ا د$ (مقالة ١) فتصير $ا ح د$
 $> ا د ه$ واذا ضعف الطرفان ظهر ان $ا ح > ا د$

• (الدعوى الخامسة النظرية) •

لا يمكن رسم كثير الاضلاع $ا د ه و$ هو المعلوم اضلاعه سوى ضلع مجهول صا
قطر النصف المحيط المار بزواياه الاعلى نسق واحدا فقط

(شكل ١٧٥) لانه اذا فرض وجود دائرة اخرى يمكن رسمه فيها فان كانت اكبر منها
اقول حيث ان اوتار $ا س و س ح و ح د$ الخ لا توافق الا اصغر الزوايا المركزية
فجميعها يكون اقل من قائمتين واذا يتعدت تلاقق نهايات الاضلاع بنهايتي قطر
الدائرة • وان كانت اصغر وقع ذلك الخلاف وعدم الموافقة فظهر انه لا يمكن
رسمه الا في تلك الدائرة على سياق واحد فقط

تنبيه يمكن تغيير وضع اضلاع $ا س و س ح و ح د$ الخ كما يراى والقطر باق على
ساحة وكذا المساحة

لانه وان تغير ترتيب اقواس $ا س و س ح$ الخ بوجه ما حسبك ان يكون
مجموعها مساويا لنصف المحيط • وفي كل حال لاتزال مساحة كثير الاضلاع
بعينها حيث انها التفاضل بين مساحة الدائرة وبين مساحة قطع $ا س و س ح$

الخ

(الدعوى السادسة النظرية)

(شكل ١٧٧) اعظم جميع كثيرى الاضلاع المرسومة بالاضلاع المطلوبة هو ما كان قابل الرسم داخل الدائرة يعنى ما يمكن رسم المحيط المار بجميع زوايا مثلث اذا كان $ا-د-ه$ دور الكثير الاضلاع المرسوم داخل الدائرة وكان $ا-د-ه-د$ غير قابل الرسم فيها وله اضلاع تساوى اضلاعه أى اذا كان $ا-د-ه-د$ و $د-ه-د$ الخ اقول ان كثيرا لاضلاع المرسوم في الدائرة اكبر مما يرسم

لانه اذا رسم قطر $ه-م$ ووصل $ا-م$ و $م-د$ وانشئ مثلث $ا-م-د$ على ضلع $ا-د$ المساوى لضلع $ا-م$ مساويا لثلث $ا-م-د$ ووصل $ه-م$ فعلى ما صرح به في الدعوى الرابعة كثيرا لاضلاع $ه-د$ و $ا-م$ المرسوم في نصف المحيط الذى قطره $م-ه$ اكبر من كثيرا لاضلاع $ه-د$ و $ا-م$ الذى لا يرسم فيه والا لكان غير يمكن الرسم كادلت عليه الدعوى الخامسة وبمثل هذا يثبت أن كثيرا لاضلاع $ه-د$ و $ا-م$ اكبر من كثيرا لاضلاع $ه-د$ و $ا-م$ فيصير $ه-د$ و $ا-م$ كثيرا لاضلاع الكامل اكبر من $ه-د$ و $ا-م$ قطعاً ولا يمكن ان يساويه *

وحيث امكن رسم احدهما في الدائرة وامتنع رسم الآخر فاذا طرح من كل مثلث $ا-م-د$ و $ا-م-د$ المتساويان يبقى كثيرا لاضلاع $ا-د$ و $ه-د$ المرسوم في الدائرة اعظم من كثيرا لاضلاع $ا-د$ و $ه-د$ الذى لم يمكن رسمه فيها

تنبيه مما صرح به في الدعوى الخامسة ثبت انه لا يمكن ذلك الا في دائرة واحدة فقط وكثيرا لاضلاع الاعظم لا يكون الا واحدا فقط وان المساحة السطحية منه تبقى بعينها وان تغير موضوع اضلاعه

(الدعوى السابعة النظرية)

الكثيرة الاضلاع المتساوية الاطراف المتصدة الاضلاع عددا اعظمها ما كان

منتظما

لانه قد ثبت في الدعوى الثانية ان اعظم كثيرى الاضلاع متساوت اضلاعه
واعظمها ما كان قابلا للرسم في الدائرة كما تقدم في الدعوى الماضية ومن اجل
ذلك ثبت المطلوب من ان يكون المنتظم اعظمها

(الدعوى الثامنة القائمة)

النسبة بين الزاويتين المركزيتين المسوحتين في الدائرتين المختلفتين كنسبة
قوسيهما المحصورين بين محيطيهما منقسمين على نصفي قطريهما
مثلا (شكل ١٧٨) تكون نسبة زاوية α الى زاوية β كنسبة $\frac{ا}{ب}$ الى $\frac{ج}{د}$

$\frac{د هـ}{د ط}$

فاذا رسم قوس α و β بين طرفي α و β طه بنصف قطر ط و المخرج المساوي
لنصف قطر α و اول التساوي انصاف اقطار α و β و تكون α : β ::
:: α : β و α : β :: $\frac{ا}{ب}$: $\frac{ج}{د}$ ولكن لمشابهة قوسى α و β و
تكون α : β :: α : β و α : β :: $\frac{ا}{ب}$: $\frac{ج}{د}$ فلذا صارت نسبة $\frac{ا}{ب}$ مساوية
نسبة $\frac{د هـ}{د ط}$ ومن ثمة ثبت المطلوب من ان يكون α : β :: $\frac{ا}{ب}$: $\frac{ج}{د}$
(الدعوى التاسعة النظرية)

كثيرا الاضلاع المنتظمة المتساويا الاطراف اكبرهما اكثر الاضلاع عددا
(شكل ١٧٩) اذا كان α و β نصف ضلع احدهما و γ مركزه و δ طه بعد
مركزه و ϵ ا - نصف ضلع الآخر و ζ مركزه و η بعد مركزه
فاذا فرض ان مركزى α و β موضوعان على γ اى بعدوان بعدى
طه و ζ موجودان باستقامة طه و حيث ان زاويتى α و β و γ و
انصافا زاويتى كثيرى الاضلاع المركزيتين المتساويتين تخطا α و β و
يلتقيان في نقطة و اذا امتداع الى الاستقامة وينزل من هذه النقطة عمود و
على طه ويرسم قوسا α و β منطيين الى ضلعي α و β و طه بان
تكون نقطتا α و β مركزين
فاذا كان الامر كما ذكر تكون α : β :: $\frac{ا}{ب}$: $\frac{ج}{د}$ كما صرح به

في الفائدة المتقدمة ولكن نسبة ده نصف الضلع الى اطراف كثير الاضلاع كنسبة زاوية ط الى اربع قوائم وايضا حيث ان نسبة ار نصف الضلع الى اطراف كثير الاضلاع الثاني كنسبة زاوية ح الى اربع قوائم وتساوي اطراف كثير الاضلاع كانت ده : ار :: ط : ح او ده : ار :: $\frac{ر}{ط} : \frac{ر}{ح}$ فاذا ضربت مقدمات هذا التناسب في مقدار ط ر وتواليه في ح ر تكون ده \times ط ر : ار \times ح ر :: ر : ر ومن هذا ولكن لتشابه مثلثي ط ده و ط ح كانت ط ه : ط ر :: ده : ح ر وبه يكون ده \times ط ر = ط ه \times ح ر وايضا لتشابه مثلثي ار ح و ح ر يكون ار \times ح ر = ح ر \times ح ر فلذا اصارت ط ه \times ح ر : ح ر \times ح ر :: ر : ر او ط ه : ح ر :: ر : ر ومن هذا علم انه متى كان قوس ر اكبر من قوس ح يلزم ان يكون بعده مركزه ط ه اكبر من ح ر بعد المركز الا خوفا اذا عمل في الطرف الاخر من خط ح ر شكل ك ك ه مساويا تاما للشكل ح ر ه بان يكون ك ه = ح ر وزاوية ح ك ه = ح ر وقوس ك ه = ح ر وحيث ان منحنى ك ه ر اكبر من قوس ك ح ر لاساطته به وحيث ان ر ه نصف المنحنى اكبر من ر ح نصف القوس كان ذلك ايهما دليل على ان قوس ر اكبر من قوس ح فعلى هذا يظهر ان ط ه بعد المركز اكبر من ح ر البعد الا نحو ولاجوم ان النسبة بين كثيرى الاضلاع المتساوي الاطراف كالنسبة بين بعدهما من المركز فلذا كان كثير الاضلاع الذي نصف ضلعه ده اكبر مما كان نصف ضلعه ار وحيث ان الزاوية المركز يمتن كثير الاضلاع الاول اصغر قدرا كانت اضلاعه ا كثر عددا * ومن اجل ذلك ثبت المطلوب من ان يكون اعظم كثيرى الاضلاع المنتظمين ما كان اكثرا لاضلاع عددا

(الدعوى العاشرة النظرية)

الدائرة اعظم كافة كثيرا لاضلاع المتساوية الاطراف

(شكل ١٨٠) كثيرة الاضلاع المتساوية الاطراف المتحدة المبدد ضلعها اعظمها

ما كان منتظما وقد سبق اثباته . فالآن لاجابة الالتفات بركن كثير الاضلاع
المساوي الاطراف المنتظم بالذات فقط

إذا كان a نصف ضلع كثير الاضلاع المرقوم و r مركزه فاقول منى كانت زاوية δ طه في الدائرة المتساوية الاطراف $= \alpha$ نظر هذا الحال بصير قوس δ مساويا لنصف ضلع a ومن كون نسبة كثير الاضلاع ك الى الدائرة ك كنسبة مثلث α الى القطاع ϕ طه من أجل هذا كانت ك : د :: $\frac{1}{\phi}$ الى α X ϵ : $\frac{1}{\phi}$ طه X طه :: ϵ : طه فإذا رسم خط هـ المحاس من نقطة هـ بان يلاقى طـ الخارج في نقطة ر فيتاقي من تشابه مثلثي α و ϕ طه هذا التناسب ϵ : طه :: a أو ده : ده فلذا صارت ك : د :: ده : ده أو كنسبة هـ X $\frac{1}{\phi}$ طه أعني مساحة قطاع طه الى ره X $\frac{1}{\phi}$ طه وهو مساحة مثلث ϕ طه وحيث ان القطاع أصغر من المثلث يكون ك يعني كثير الاضلاع أصغر من د يعنى الدائرة من أجل ذلك ثبت المطلوب من ان تكون الدائرة أعظم كثيرى الاضلاع المنتظمة المتساوية الاطراف

• (تمت المقالة الرابعة) •

المقالة الخامسة

في بيان السطوح المستوية والزوايا المجسمة

المعروف

(حدا) متى كان خط مستقيم عمودا على جميع الخطوط المستقيمة التي تمر بمرؤعه في سطح مستو فيصير عمودا على ذلك المستوى والمستوى يكون عليه عمودا (٤) والموقع هو نقطة التقاء المستوى بالعمود

٢ اذا امتد الخط المستقيم والسطح المستوي ولا يلتقيان فالخط يكون موازيا للسطح والسطح أيضا يكون موازيا له

٣ المستويان المتوازيان لا يلتقيان أبدا اذا امتد ابلا نهاية

٤ سياتي في الدعوى الثالثة ان الفصل المشترك للسطحين المتقيين خط مستقيم والزاوية أو الانحراف الذي بينهما هو مقدار المابين السطحين من انفراج قل أو كثر وتعين مساحته بالزاوية الواقعة بين العمودين الخارجين من نقطة واحدة من الفصل المشترك في كل من السطحين وسيأتي ذكر تفصيله في الدعوى السابعة وتلك الزاوية اما ان تكون حادة أو قائمة أو منفرجة

٥ فان كانت قائمة يصير كل واحد من المستويين عمودا على الآخر

٦ الزاوية المجسمة هي المساحة المنزوية الحاصلة من اشتغال بجهة سطوح مستوية قد اجتمعت في نقطة واحدة فلذا (شكل ١٩٩) زاوية سره المجسمة حصلت من

اجتماع مستويات $اسه$ و $رسمه$ و $رسمه$ و $رسمه$

اقل ما يلزم لتشكيل زاوية مجسمة ثلاثة مستويات

• (الدعوى الاولى النظرية) •

لا يمكن ان يكون بعض المستقيم في المستوى وبعضه خارجا عنه

لان وجود نقطتين مشتركين من هذا الخط في المستوى يستلزم كون جميع

المستقيم الذي وجد بعضه على المستوى لاشتراكيه في نقطتين ووجوده بتمام
اجزائه على ذلك المستوى ظاهر كما هو في تعريف المستوى
تبيينه لاجل ادراك استواء السطح لا بد من تطبيق خط مستقيم على ذلك السطح
من جهات مختلفة وان يرى غايته بجميع اجزاء امتداد ذلك السطح
• (الدعوى الثانية النظرية) •

الخطان المستقيمان المتقاطعان يعينان وضع مستو وهما موجودان عليه
(شكل ١٨١) مثلا اذا تقاطعا خطا $ا ب$ و $ا ج$ المستقيمان في نقطة $ا$ اولاً يتصور
المستوى الذي فيه يوجد $ا ب$ ثم يدور حوله حتى يمر بنقطة $ج$ وحين وجد
نقطتا $ا ب ج$ من خط $ا ج$ في ذلك المستوى وجب وجوده كاملاً فيه وتبين
ان وضع ذلك المستوى يتعين بجهة احاطة خطي $ا ب$ و $ا ج$ وثبت المطلوب
(نتيجة ١) مثلث $ا ب ج$ اولاً ثلاث نقط ليست على مستقيم واحد تعين وضع مستو
(نتيجة ٢) (شكل ١٨٢) ايضاً خطا $ا ب$ و $ا ج$ المتوازيان يعينان وضع مستو
• لانه اذا رسم خط $هـ$ هو القاطع فالمستوى الذي يحوي خطي $ا هـ$ و $هـ ج$ هو
مستوى خطي $ا ب ج$

• (الدعوى الثالثة النظرية) •

اذا تقاطع المستويان فيكون الفصل المشترك خطاً مستقيماً • لانه اذا وجد من
النقط المشتركة بين المستويين ثلاث نقط ليست على خط مستقيم فلا بد من
مرور كل من المستويين من تلك النقط ولا يمر من ثلاث نقط الا مستو واحد فقط
كما هو صريح الدعوى التي تقدمت فمن هذا يلزم ان يكون المستويان مستويين
واحدًا وهذا بخلاف ما نطق به الدعوى ومن أجل ذلك ثبت المطلوب من ان
يكون الفصل المشترك خطاً مستقيماً

• (الدعوى الرابعة النظرية) •

(شكل ١٨٣) اذا كان خط $ا د$ المستقيم عموداً على محل تقاطع خطي $د ب$
و $د ج$ المتقاطعين في مستوى $د$ يصير عموداً على كل خط مستقيم يمر بموقعه
فهو $د ك$ وايضاً على مستوى $د$

برسم خط $ر د$ المستقيم المار بنقطة $ك$ التي تعينت كيفما اتفق على خط
 $د ك$ في زاوية $ر د د$ بان يكون $ر ك = د ك$ (مقالة ٤٣ على ٥)
 وتوصل خطوط $ا ر$ و $ا ك$ و $ا د$ فاقول حيث انقسمت $ر د$ قاعدة
 مثلث $ر د د$ بمساويين في نقطة $ك$ يصير $د ك = ر ك$
 $+ د ك = ر ك$ وكذلك في مثلث $ا د د$ $ا د = ا ك$
 فاذا طرحنا المساوية الاولى من هذه يصير $ا د - ا ك = ر ك - د ك$
 $= د ك - ا ك$

ولكن لنباين كل من مثلثي $ا د د$ و $ا ر د$ في نقطة $د$ يكون $ا د - ا ك = ر ك - د ك$
 $= ا د - ا ك$ وكذا $ا ر = ا د - ر ك$ فاذا وضعنا $ا د$ في مقامه
 في المساواة الاولى يصير $ا د + ا د = ا ر + ا ك$ وحيث
 لم نزل المساواة باقية على خالها اذا انصف الطرفين صار $ا د = ا ك$ و
 $ا ك = د ك + ا د$ فلذا ثبت قيام مثلث $ا د ك$ في نقطة $د$ (مقالة ٣)
 ونظهر كون خط $ا د$ عمودا على خط $د ك$

تنبيه لم يختص هذه الدعوى بشيئ امكان ان يكون الخط المستقيم عمودا على
 جميع الخطوط التي تمر بموقعه في المستوى انما المراد منها كلما كان الخط المستقيم
 عمودا على الخطين المتقاطعين في المستوى بصيرته تحقيق كاف وبيان شاف
 لاثبات ما قد ورد في الحد الاول من هذه المقالة

(نتيجة ١) حيث ان عمود $ا د$ أقصر من $ا ك$ أي ماثل فهو والبعد الحقيقي
 بين نقطة $ا$ ومستوى $د ك$

(نتيجة ٢) لا يمكن إقامة عمود من نقطة $د$ المفروضة على مستوي الا عمود واحد
 فقط

لانه لو أمكن اخراج عمودين من عين نقطة δ فاقول اذا مر بمستوي هذين العمودين وكان الفصل المشترك بينهما مستوي ϵ م مثلا δ ك فكل واحد من هذين العمودين يصير عمودا على خط δ واذا لم يكن اخراج عمودين من نقطة واحدة على مستقيم في مستوي واحد وهذا مستحيل فلذا تبين انه لا يمكن اخراج عمودين على مستوي واحد من نقطة واحدة واقعة على ذلك المستوي • وأيضا لا يمكن تنزيل عمودين على مستوي من نقطة خارجة عنه لانه لو كان α و β عمودين يلزم قيام زاويتي α ك و β ك من مثلث α ك وقد استحال

• (الدعوى الخامسة النظرية) •

الموائل التي افترقت عن العمود بابعاد متساوية تكون متساوية والتي افترقت بابعاد مختلفة أبعد ما من العمود أطول

(شكل ١٨٤) لانه متى كانت زوايا α - و β و γ قائمة وفرضت ابعاد δ - و ϵ و ζ متساوية فالثلثات α - و β و γ تكون متساوية لتساوي ضلعي الاضلاع و α و β و γ التي بينهما فلهذا صارت أوتارها اقواس متساوية وهي موائل α - و β و γ • وايضا اذا فرض ان بعد δ أطول من بعد ϵ أو مساوية δ ثبت المطلوب من ان يكون مائل α أكبر من مائل β أو γ

نتيجة جميع المخطوط المائلة المتساوية فتحو α - و β و γ الى الخ تكون منتهية الى محيط δ و ϵ و ζ المرسوم بمركز δ موقع العمود ومتصلة به فلذا اذا كانت نقطة α الخارجة عن المستوي معلومة معينة واريده وجود نقطة δ موقع العمود الذي يراد تنزيله منها على المستوي المرقوم أقول أولا تبين فقط δ - و ϵ و ζ و الثلاث على المستوي بان تكون ابعادها متساوية من نقطة α المعينة ثم اذا استخرج مركز الدائرة التي تمر بهذه النقطة فهو δ موقع العمود المطلوب

تبين زاوية α - هي ميل أو انحراف مائل α - على مستوي ϵ م

وانحراف جوائل a - و a و a و a حيث تساوت مثلثات a -
و a و a *

• (الدعوى السادسة النظرية) •

(شكل ١٨٥) اذا كان خط a عمودا على مستوى m وخط b موضوعا
عليه وانزل عمود d على b من نقطة c موقع العمود ووصل a
فهذا الخط الموصول يصير عمودا على خط b

فاذا اخذت $d = d$ ووصلت d و d و a و a فاقول حيث ان
 $d = d$ يكون مائلا و d متساويين وايضا من كون $d = d$
يكون مائلا a و a متساويين نظرا الى عمود a ولوجود نقطتي a و d
من خط a على ابعاده متساوية من نهايتي d و d يكون خط a عمودا على
وسط خط b

نتيجة لقد بينت من هذا ان خط b صاير عمودا على مستوى a و a لانه عمود
على كلا خطي a و d

تنبيه خط a و d المستقيمان لا يلتقيان اصلا * لانهما كلتوا زوايا
وان ليسوا على مستوي واحد والبعد الاقرب بينهما هو خط d العمود على كل
منهما لانه اذا وصل بين نقطتين اخريين فهو a و b يكون $a < d$
و $d < a$ فلذا $a < d$

واما رسم زاوية قائمة بين خطي a و d فمكن لهذا وان لم يكونا على مستوي
واحد لانه تحدث زاوية قائمة بين خط a وبين الخط المرسوم من احدى نقطتيه
موازي لخط d وكذا يمكن ان ترسم زاوية قائمة بين كل خطين ليسا على مستوي
واحد فنجواب d و d مثل التي رسمت بين خط a وبين الخط المرسوم من نقطة
منه موازيا لخط d

• (الدعوى السابعة النظرية) •

(شكل ١٨٦) اذا كان خط a عمودا على مستوى m فكل خط يوازيه
فهو d يكون عمودا على المستوى المرقوم

فأقول إذا مررست من خطي α و β المتوازيين بخط γ بصيرفصل مشترك
بينه وبين مستوى π فإذا أخرج عود δ على خط γ وفيه β يكون
عودا على مستوى α و β كما هو صريح تنبئة الدعوى التي تقدمت فزاوية
سواء تكون قائمة وكذا زاوية δ و α لأن خط α عود على خط γ وخط
هو مواز له وحيث صار خط δ عودا على خطي γ و β ثبت المطلوب من
أن يكون عودا على مستوى π

(نتيجة ١) وبالعكس إذا كان خطا α و β عودين على مستوى π بصيران
متوازيين * لأنه ان لم يكونا متوازيين واقيم من نقطة γ خط مواز لخط α
فهذا الخط يصير عودا على مستوى π وإذا لم يكن أخرج عودين من نقطة
واحدة على مستوى واحد وهو محال كصريح الدعوى الرابعة

(نتيجة ٢) إذا كان خطا α و β المستقيمان موازيين لخط γ المستقيم الثالث
يكونان متوازيين * لأنه إذا تصور مررست عودا على خط γ فيصير موازيا
١ و β عودين عليه وعلى ما صرح به في الدعوى التي تقدمت يكونان
متوازيين

ويفهم من هذه النتيجة أن تلك الخطوط ليست على مستوى واحد لأن ذلك تقدم
ذكره في المقالة الأولى

(الدعوى الثامنة النظرية)

(شكل ١٨٧) إذا كان خط α موازيا لخط β المرسوم في مستوى π
يكون موازيا أيضا للمستوى المرسوم
لأنه إذا كان α في مستوى π و β الملاقى مستوى π فأقول حيث
لا يمكن وجود بعض نقط من β الفصل المشترك في غير مستوى π وان
خط α مواز لخط β فلا يلاقيه أصلا ومن ذلك لا يلاقى ذلك المستوى
وموازيه (٢٨٠)

(الدعوى التاسعة النظرية)

(شكل ١٨٨) إذا كان مستويا π و β عودين على خط α بصيران

متوازيين

لانه اذا فرض بينهما التلاقي وكانت نقطة و مشتركة فيهما فاقول اذا وصل خطا $ا د و$ سو يكون خط $ا ب$ عمودا على كل منهما حيث كان عمودا على كل من مستويي $م د$ و $س ع$ وعلى كل خط يمر بموقعيه فيهما واذا الامكن انزال عمودين من نقطة واحدة على مستقيمين واحد هو محال ومن اجل ذلك استحال التقاء مستويي $م د$ و $س ع$ وبث التوازي

(الدعوى العاشرة النظرية)

(شكل ١٨٩) هو دوح الفصلان المشترك الحاد ثان من تلاقي مستويي $م د$ و $س ع$ المتوازيين بمستوي $و ز$ الثالث متوازيان فاقول حيث ان خطي $و ه و ح$ ر على مستوي واحد فان لم يتوازيا وان امتد التقييلزم التقاء مستويي $م د$ و $س ع$ واذا لا تقي فهما التوازي وهذا بخلاف ما فرضناه ومن اجل ذلك يجب توازي $و ه و د$ الفصلين المشتركين واستحالة الالتقاء وبث المطلوب

(الدعوى الحادية عشرة النظرية)

(شكل ١٨٨) اذا كان خط $ا ب$ عمودا على مستوي $م د$ ايضا يكون عمودا على مستوي $س ع$ الموازي له
 أقول يرسم خط $ح د$ كيفما اتفق في مستوي $س ع$ ويمر بمستوي $ا ب$ من خطي $ا ب$ و $ح د$ فالفصل المشترك بينهما وبين مستوي $م د$ وهو خط $ا ب$ يوازي خط $ح د$ وحيث ان خط $ا ب$ عمودا على مستوي $م د$ يكون عمودا على خط $ا ب$ الذي فيه فيصير عمودا على خط $ح د$ الذي يوازيه ومنه كان $ا ب$ عمودا على كل خط يمر بموقعه فنحو $ح د$ يصير عمودا على مستوي $س ع$ وبث المطلوب

(الدعوى الثانية عشرة النظرية)

(شكل ١٨٩) هو دوح المتوازيان الواقعان بين مستويي $م د$ و $س ع$ المتوازيين متساويان

فأقول إذا مر مستوى $هـ د ح$ و من متوازي $هـ د$ و $و ح$ فيلاق المستويين المتوازيين في $هـ د$ و $و ح$ وهما متوازيان وحيث فرض توازي $هـ د$ و $و ح$ صار شكل $هـ د ح$ و متوازي الاضلاع ومن ثمة ثبت ان يكون $هـ د = و ح$ نتيجة لقد ظهر من هذه الدعوى ان المستويات المتوازية لا تزال على ابعاد متساوية في كل جهة * لان خطي $هـ د$ و $و ح$ في كنانا عودين على مستويين $م$ و $س$ ع يتوازيان وينساويان

(الدعوى الثالثة عشرة النظرية) *

(شكل ١٩٠) اذا كانت زاويتا $ح ا هـ$ و $د و$ المختلفة المستوى متوازية الاطراف متحدة الجهة وضعا تكونان متساويتين * ومستوياهما بصيران متوازيين فاذا اخذ $ا د = س و$ و $ا هـ = و د$ ووصل $هـ د$ و $د و$ و $ا س$ و $د و$ و $هـ د$

فأقول حيث ان $ا د$ مساوية وواضحة $س د$ يكون شكل $ا س د ح$ متوازي الاضلاع (مقالة ١) فخط $د س$ يوازي ويساوي خط $ا س$ وبمثل هذا ثبت ان خط $هـ د$ يوازي ويساوي خط $ا س$ وكذلك من توازي وتساوي خطي $د س$ و $هـ د$ يكون شكل $د هـ و$ ايضا متوازي الاضلاع فلذا صار ضلع $هـ د$ موازيا ومساويا للضلع $و د$ فعلى هذا يتساوى مثلثا $ح ا هـ$ و $د و$ وزاوية $ح ا هـ$ تساوي زاوية $د و$

المعروفة الثانية مستوى $ا هـ د$ يوازي مستوى $س د و$ * لانه اذا فرض ان المستوى الموازي لمستوى $س د و$ المار بنقطة $ا$ يلتقي بخطي $د س$ و $هـ د$ في غير نقطة $د$ و $هـ$ متلافي نقطتي $د و ح$ فتساوي خطوط $ا س$ و $د س$ و $و ح$ الثلاثة كما مر في الدعوى الثانية عشرة وقد ثبت آتفاها تساوي خطوط $ا س$ و $د س$ و $هـ د$ الثلاثة واذن لم ان يكون $د س = د و$ و $هـ د = و ح$ وهذا مستحيل ومن اجل ذلك وجب التوازي بين مستويي $ا هـ د$ و $س د و$ وثبت المطلوب

نتيجة زاويتا $ح ا هـ$ و $د و$ الحادتين من القصول المشتركة بالتقام مستويي

م و س ع المتوازيين بمستوي α و ه ا د و الاخيرين
تكونان متساويين لان فصل α مواز لفصل β وايضا لتوازي α ه
و د تكون زاوية α ه مساوية لزاوية β د و
(الدعوى الرابعة عشرة النظرية) •

(شكل ١٩٠) اذا تساوت وتوازيت α و β و هو الثلاثة خطوط
المستقيمة التي ليست على مستو واحد يتساوى المثلثان α ه و د و
الحادثان من وصل نهايات تلك الخطوط وتوازي سطوحها
اقول حيث ان خط α مواز ومساو لخط β يكون شكل α د متوازي
الاضلاع فيكون ضلع α موازيا لاضلع β وايضا ضلعا α ه و د
وضلعا β ه و د فعلى هذا يتساوى المثلثان المرقومان ويثبت المطلوب
من ان يكون مستويا هما متوازيين كما صرح به في الدعوى التي تقدمت
(الدعوى الخامسة عشرة النظرية) •

الخطان المستقيمان الواقعان بين ثلاثة مستوية متوازية منقسمان على اقسام
متناسبة

(شكل ١٩١) مثلا اذا فرض التقاء خط α بمستوي م و س ع و
ف ص ه في نقط α و ه و ر و خط β في نقط β و و د و في فصل
تناسب α ه : ه ر :: β و : و د
فاذا وصل α د فليقتطع مستوي س ع في نقطة د واذا وصل α و ه د
و د و د و س يكون ه د و س الفصلان المشتركين بين مستويي س ع
و ف ص ه و بين مستوي α د متوازيين فتكون α ه : ه ر ::
د : د و لتوازي فعلي α د و د صارت د : د و :: و د : و د
ولوجود النسبة المشتركة في هذين التناسيل يثبت المطلوب من ان تكون α ه :
ه ر :: β و : و د

(الدعوى السادسة عشرة النظرية) •

(شكل ١٩٢) ذرا ربعة اضلاعها α د و موضوحا كان على مستو واحد

أو غير موضوع إذا قطع ضلعيه المتقابلين خطا هو و دح المستقيمان على
التناسب اعني اذا كان أه : هـ :: دؤ : دس و سد : دد ::
أح : ح ● فالخطان القاطعان هو و دح يقطعان في نقطة م على
ان تكون م : ح :: م : أه : هـ و هم : مد :: أح :
ح :

فإذا مر بمستوى أـ حـ دـ على اء بشرط ان لا يمر من دح و رسمت خطوط
هـ هـ و سـ و دـ و دؤ موازية لخط دح من نقط هـ و سـ و حـ و دـ
فهذه الخطوط تلتقي بذلك المستوى في نقط هـ و سـ و دـ و تلتوازي
خطوط سـ و دـ و حـ (١٥ مقالة ٣) تكون سـ ح : ح دؤ :: سـ دـ
: دـ :: أح : ح فإذا تشابه مثلثا أـ حـ و سـ و دـ (٢٠ مقالة ٣)
وبعد تصير أه : هـ :: أه : هـ و دؤ : دس :: دؤ : دد
وايضا أه : هـ :: دؤ : دس أو بطريق البديل أه : دؤ ::
أـ : دـ لكن تشابه مثلثي أـ حـ و دـ حـ تكون أـ : دـ ::
أح : ح وبه تكون أه : دؤ :: أح : ح

ولتشابه مثلثي أـ حـ و دـ حـ تكون زاوية هـ أـ حـ تساوي زاوية ح دؤ
فلذا يشابه مثلثا أـ حـ و دـ حـ (٢٠ مقالة ٣) فلذا زاوية أـ حـ هـ = دـ حـ دـ
فبدا ان يكون هـ حـ و دـ حـ مستقيما واحدا وايضا هـ هـ و دـ و خطوط
الثلاثة المتوازية تكون واقعة في المستوى الذي فيه خطا هو و دح المستقيمان
المقاطعان في نقطة م ثم يظهر هذا التناسب هم : مد :: هـ ح :
ح دؤ :: أح : ح وذلك لتوازي هـ هـ و دـ حـ و دؤ
فإذا جرى العمل المرقوم على خط أـ ثبت تناسب م : د :: أه :
هـ :

• (الدعوى السابعة عشرة النظرية) •

(شكل ١٩٣) يمكن ان تعين مساحة الزاوية الواقعة بين مستويي م اء و م اـ

بزاوية \angle اسم الحادثة بين عمودي \angle و اسم المخرجين في كل من
المستويين على الفصل المشترك α كما ذكر في الحد الرابع
ولاجل اثبات ذلك كما ينبغي وبيان كيفية الطريق التي يستقر عليها ويدوم اجراؤه
فيه ومن أي نقطة من الفصل يخرج العمودان لا بد من البحث عن ذلك فاذا
اخذت α نقطة اخرى على α الفصل المشترك واقيم عمود β في مستوى
 α و عمود γ في مستوى β وحيث ان كل واحد من خطي α -
و اسم عمود على مستقيم α يكونان متوازيين وايضا خط β يوازي خط
 α فلذا صارت زاوية β = α فحين ان الزاوية الحادثة باخراج
العمودين سواء كانت من نقطة α أو من نقطة β أو من أي نقطة كانت على
الفصل المشترك لم تزل بينهما

فأما اذا زادت أو نقصت الزاوية التي بين المستويين ببعض النسب هلا تزداد زاوية
 β = α كذلك بل ولكن يلزم البحث ايضا عن ذلك فاذا جعلت نقطة α مركزا
ورسمت بهد كفة α اتفق قوس β و γ في مستوى β و رسم ايضا قوس
 δ من مركز α بالبعد المذكور ووصل α كيفما اتفق δ اقول حيث
ان مستويي β و γ عمودان على مستقيم α يكونان متوازيين
فاذا صار α و β الفصلان المشتركان بين المستويين المرقومين وبين
مستوى α متوازيين وزاوية β تساوي زاوية γ تسهلا
للاذراك اذا سميت الزاوية التي بين مستويي β و γ و δ و ϵ كنا وعلت
كما ذكر وساتت زاوية δ اسم زاوية α لاجرم ان ركن δ اسم β
يساوي ركن δ و ذلك بانه اذا وضعت قاعدة δ على مساويتها
 δ وضعا صحيحا تاما فيطبق الركنان ويتخذان لاتحادا ارتفاعا α فيهما
فتبين ان كمية اشغال زاوية δ اسم على زاوية δ اسم قدر كمية اشغال ركن
 δ اسم β على ركن δ اسم γ وان النسبة بين زوايا δ اسم و δ اسم
كما بين ركني δ اسم و δ اسم وما ذكر من التفصيل في الدعوى
السابعة عشر فمن المقالة الثانية يشابه ما ورد ههنا ومن اجل ذلك صارت تؤخذ

لانه اذا اخرج عمود $سـ$ في مستوى $مـ$ على خط $سـ$ فزاوية $اسـد$ تصير قائمة * لان المستويين متعامدان ومن كون $اسـ$ عمودا على خطي $سـ$ و $سـد$ في مستوى $مـ$ يكون عمودا على المستوى المرقوم *
نتيجة اذا كان مستوى $اـ$ عمودا على مستوى $مـ$ واخرج عمود من $سـ$ نقطة الفصل المشترك على مستوى $مـ$ فهذا العمود يوجد في مستوى $اـ$ فان قبل لم يكن فيه اقول حيث يمكن اخراج عمود $اسـ$ على الفصل المشترك $سـ$ في مستوى $اـ$ فهذا العمود يصير كذلك عمودا على مستوى $مـ$ واذن أمكن اخراج عمودين من نقطة واحدة على مستوي واحد وهو محال

(الدعوى العشرون النظرية) *

(شكل ١٩٤) اذا كان مستويا $اـ$ و $اـد$ عمودين على مستوى $مـ$ الثالث فصلهما المشترك $اسـ$ يصير عمودا على المستوى المرقوم * لانه اذا اخرج عمود من نقطة $سـ$ على مستوى $مـ$ فلا بد له هذا العمود ان يوجد في كلا مستويي $اـ$ و $اـد$ معا * وما هو الا $اسـ$ ومن ثمة ثبت المطلوب ان يكون عمودا

(الدعوى الحادية والعشرون النظرية) *

(شكل ١٩٥) اذا تشكلت الزاوية الجسمة من ثلاث زوايا مسطحة فمجموع كل اثنين منها أكبر من الثالثة

شرط في هذا الباب ان تكون كل واحدة من مجموع الاثنين اصغر من الثالثة لانها اذا كانتا كبير فلا حاجة - ينتدلا ثبات انما يفرض في زاوية $سـ$ الجسمة التي تشكلت بثلاث زوايا $اسـد$ و $اسـهـ$ و $اسـز$ المسطحة ان زاوية $اسـ$ هي الاكبر اقول ان $اسـ > اسـد + اسـهـ$ * لانه اذا انشئت زاوية $سـ$ في مستوى $اسـ$ مساوية لزاوية $سـد$ ورسم خط $اـ$ المستقيم كيفما اتفق واخذ $سـهـ = سـد$ ووصل $اـد$ فن كون ضلعي $سـد$ و $سـهـ$ مساويين ضلعي $سـد$ و $سـهـ$ واتساوي زاويتي $سـد$ و $سـهـ$ بالعمل يلزم تساوي مثلتي $سـد$

و - منه \angle فاذن $\angle = \angle$ لكن $\angle - \angle > \angle + \angle$ -
 فاذا طرح من أحد طرفي هذين الغير المتساويين \angle ومن الآخر \angle
 المساوي لـ \angle $\angle > \angle$ ومن تساوى ضلعي \angle و \angle لـ ضلعي
 \angle و \angle و حيث ان \angle الثالث اصغر من \angle تكون زاوية \angle \angle
 $> \angle$ (١٠٠ مقالة) فاذا اضيف الى كل من طرفي هذين الغير المتساويين
 زاويتا \angle و \angle المتساويتان يثبت المطلوب من ان \angle يكون
 $\angle + \angle$ او $\angle - \angle > \angle + \angle$ - \angle

(الدعوى الثانية والعشرون النظرية) *

مجموع الزوايا المسطحة التي تحيط بالجسم لا يزال أصغر من اربع قوائم
 (شكل ١٩٦) اذا قطعت زاوية \angle الجسم بمستوتما \angle و \angle و وصلت
 خطوط دا و دب و دج و دد و ده من نقطة و المفروضة على ذلك
 المستوى الى سائر رؤس الزوايا فيكون عدد المثلثات \angle و \angle و \angle و \angle و \angle
 الخ التي داخل الجسم ورأسها \angle ومجموع زواياها مكافئ لعدد المثلثات
 الجسم في نقطة و اعني اوب و سوح و حود الخ ومجموع زواياها ولكن
 حيث ان مجموع زاويتي \angle و \angle الجسمين في نقطة - اي زاوية \angle -
 اصغر من مجموع زاويتي \angle و \angle وكذلك ما كانت في نقطة \angle فهو
 $\angle + \angle > \angle + \angle$ وكذا ما اثر زوايا كثير الاضلاع
 \angle هي الاصغر فتبين ان مجموع الزوايا التي توجد على قواعد المثلثات
 الجسم رؤسها في نقطة و اصغر من مجموع الزوايا التي توجد على قواعد
 المثلثات الجسم رؤسها في نقطة \angle ومن ثمة صار مجموع الزوايا المرسومة حول
 نقطة و اكبر من مجموع الزوايا التي في نقطة \angle نظر المسكافة الجسم وعين
 لكن مجموع ما حول نقطة و من الزوايا - او لاربعة قوائم (٥ مقالة ١) ومن
 اجل ذلك يثبت المطلوب من ان يكون مجموع الزوايا التي تصورها زاوية \angle الجسم
 اصغر من اربع قوائم
 تنبيه شرط في هذه الدعوى ان تكون الجسم محدبة واذا امتد احد سطوحها

ع ا = ف د ه و حيث ان زاوية ع ا = هي الانحراف بين مستوي
 ا س ر و ا س د و زاوية ف د ه هي الانحراف بين مستوي د ط ه
 و ط د و فتد صارا الانحرافان المرقومان متساويين
 واما كون ا زاوية مثلث ع ا = القائم الزاوية انحرافا للمستوي ا س ر
 و ا س د فذلك ما دام عمود ع واقعا في طرف س د نظرا لخط س ا واما
 اذا وقع في طرف آخر فيكون الانحراف بين المستويين المرقومين زاوية منفرجة
 حيث لو اضيف اليها ا زاوية مثلث ع ا = فيحصل قائمتان * لكن حقيقة ذ
 يكون انحراف مستوي ط د ه و ط د و زاوية منفرجة لو ضم اليها د زاوية
 مثلث د ف ه لحدث قائمتان وحيث لا انفكاك للتساوي عن زاويتي ا و د
 يحكم بان يكون الانحراف بين مستوي ا س ر و ا س د مساويا للانحراف
 بين مستوي ط د ه و ط د و

تنبيه اذا تركبت الجسمتان من ثلاث الزوايا المسطحة المتناظرة مع اتحاد الوضع
 بين الزوايا المسطحة المتناظرة او للتساوية في كليهما فمسيران متساويين واذا
 وضعت احدهما على الاخرى تطبقان وقد ثبت امكان وضع ذي الاربعة
 الاضلاع س د ا ع د على مساوية ط د و

فاذا وضع س د ا على مساوية ط د ه يقع س د ه على ط د ونقطة ع على
 نقطة ف واصلكن لوجود التساوي بين مثلثي ا ع د و د ه ف يكون خط
 س د ه العمود على مستوي ا س د عمودا على خط ف ه العمود على مستوي
 ط د و فضلا عن اتحاد جهة العمودين المرقومين ف وقعت نقطة ر على نقطة
 ه وخط ر س د على ه ط ف اجل ذلك تطابقت الزاويتان الجسمتان
 تطابقا تاما

واما هذه المطابقة فتكون في الزوايا المجسمة الموضوعة على نسق واحد وفي غيرها
 لا تكون * لان الزوايا المسطحة اذا كانت موضوعة على عكس الترتيب او كان
 عمودا ع د و ف ه مختلفي الجهة في محل اتحاد الجهة نظرا الى مستوي ا س د
 و ط د فيتنع انطباق الزاويتين المجسمتين لكن لوجود التساوي بين انحرافات

المستويات المتساوية الزوايا فلا خال فيما ورد في هذه الدعوى فان تطبيقها
لامدخل له في ذلك لان الزوايا المجسمة لم تزل الاقسام التي تركبت منها والمساواة
التي بينهما باقية الا انه يمنع التطبيق بسبب عكس الترتيب وحيث ان المساواة
واقعة ولكن ليست بطريق المطابقة اعني التساوي مع اتحاد الترتيب بحيث زوايا
مجسمة متساوية بالتماثل

مثلا اذا تركبت الزاويتان المجسمتان من ثلاث الزوايا المسطحة المتساوية
المتناظرة وكاتتا على عكس الترتيب وضعا يقال لهما تين الزاويتين المجسمتين
متساويتان بالتماثل أو يقال متماثلتان واستحسن اطلاق ذلك عليهما

وما ذكر في هذا الباب لا يختص بالمجسمة الثلاثية بل يجري على ما تركبت من
ثلاث الزوايا المستوية فصاعدا فاذا تركبت زاوية مجسمة من α و β و γ
و δ وه الزوايا المسطحة وتركبت أخرى من α و δ و γ و β
المرقومة عينا بعكس الترتيب فجميع الميل الذي بين المستويات المتساوية يكون
متساويا ولا امتناع الانطباق بسميان زاويتي مجسمتين متماثلتين

واما في الاشكال المسطحة بوجود التماثل فلا يقع التساوي لان التساوي بينهما
مطلق يعني بالمطابقة * حيث يمكن تحويل الاشكال المسطحة الى كل وجهه
واما في الاجسام فليس كذلك لان التساوي فيها اما بالمطابقة واما بالتماثل فقط

(الدعوى الرابعة والعشرون العملية) *

طريق استخراج الزاوية التي بين المستويين من زاوية مجسمة معلومة الزوايا
المسطحة الثلاث

مثلا (شكل ١٩٨) اذا كانت الزاوية المصجمة المجسمة سم وزواياها المسطحة
 α سم و β سم و γ سم معلومة واريد استخراج الزاوية التي بين التين
من تلك الزوايا المسطحة مثلا اذا كانت الزاوية المطلوبة ما بين مستوي α سم و
و β سم فاذا جرى او تصور اجراء العمل المرسوم في الدعوى المتقدمة
تكون زاوية ع α هي الزاوية المطلوبة

وانما المراد افعال هذه الزاوية عينا على سطح مستوي بطريق التسطیح

فلاجل اجراء ذلك أقول اذا علمت زوايا α و β و γ مساوية
لزوايا α' و β' و γ' التي في المجسمة على مستو واحد واخذ كل
واحد من خطي α و β و γ مساويا لخط α' في المجسمة وأنزل عودا
 α و β من نقطتي α و β على α' و β' فهذان العمودان
يلتقيان في نقطة ϵ

فيعرسم نصف محيط α هـ بنصف قطر α يجعل نقطة α مركزا فإذا
أخرج عود ϵ من نقطة ϵ على α يلتقي بالمحيط في نقطة α فإذا وصل
 α ب ϵ فزاوية α الحادة هي الانحراف بين مستويي α و α'
المطلوب والمعنى ان مثلث $\epsilon \alpha \alpha'$ في المسطحة يرى عين من α ϵ
في المجسمة ولقيام مثلثي α و α' في نقطة α وتساويهما في زاويتي
 α المتقابلتين α و α' ولتساوي وترتي α و α'
يلزم تساوي ذلك المثلثين وخط α في المسطحة يساوي خط α' في المجسمة
وأيضاً خط α في المسطحة أو α المساوي له يساوي α في المجسمة وأيضاً
 α يساوي فيه α ومن ذلك يكون الشكل ذو الأربعة الأضلاع $\alpha \epsilon \alpha'$
مساوياً لنفسه في كل منهما فلذا صار α في المجسمة يساوي خط α في المسطحة
وثبت ان مثلثي α و α' القائمي الزاوية، تساويان في كل ما لتساوي
وترتي قائميهما وأحاد اضلاعهما ومن اجل ذلك ظهر ان زاوية α التي
وجدت بطريق تسليج الزاوية تساوي الانحراف بين مستويي α و α'
في الزاوية المجسمة وان وقعت نقطة ϵ بين نقطتي α و α' تنعرج زاوية α
وعلى اى حال لم يزل الانحراف الحقيقي بين المستويين مقداراً لها

فعلى ذلك اشير الى الانحراف بحروف α ولم يشير اليه بحروف α ليعلم
المخلصر له الا ذلك الانبات في كل الوجه
تنبيه برسوال وهو اذا اخذت ثلاث زوايا مسطحة كيفما اتفق هل يمكن بها
تشكيل مجسمة اولاً

بواسطة دسمه زاوية هـ ا ب والمستويان الآخران معلومان كذلك يمكن استخراج دسمه بواسطة هـ ا ب وبه تحل الدعوى
فيؤخذ دسمه كيفية اتفق وينزل عمود هـ الغير المحدود على سـ ا
وتعمل زاوية هـ ا ب مساوية للمابين المستويين المعلومين ومن نقطة ب ملتحق
المحيط المرسوم بنصف قطر ا ب من مركز ا نهاية صلح ا ب ينزل عمود بـ ع
على ا هـ ومن نقطة ع ينزل عمود عـ د الغير المحدود على دسمه وينتهي
الى نقطة د بان يكون دسمه = دسمه فزاوية دسمه هـ هي الزاوية
المسطحة المطلوبة

لانه لو رسمت زاوية مجسمة بالثلاث زوايا المسطحة دسمه ا و دسمه د و دسمه
لوجد الانحراف الذي بين مسطحتي ا دسمه و دسمه المعلومتين مساويا
زاوية هـ ا ب المألومة

تنبيه (شكل ١٩٩) اذا تصورت زاوية مجسمة ذات اربع وجوه اى تصورت من
ا دسمه و دسمه د و دسمه دسمه الزوايا المسطحة فلاجل تحديد انحرافات
هذه المستويات لا يكتفى بكونها معلومة

لانه يمكن ان يرسم بهذه السطوح الاربعة زوايا مجسمة متعددة لكن اذا زيد على
ما ذكر شرطا وهو ان يكون الانحراف بين مستويي ا دسمه و دسمه
معلوما تعيين الزاوية المجسمة ويتعين ككل انحراف واقع بين اى
مستويين

فاذا تصورت تشكيل مجسمة ذات وجوه ثلاثة من الزوايا المسطحة ا دسمه و
دسمه و دسمه و كان الاولان وما بينهما من الانحراف معلوما تعين
ا دسمه الثانية بمصرح به من الحاصل في هذه الدعوى ثم ترى الاخرى
تركب من ا دسمه و دسمه و دسمه الثلاث زوايا المسطحة
المألومة ومتى كانت الزوايا الثلاث المرقومة معلومة تصير المجسمة
محدودة

وحيث تبين تحديد الزاوية الثلاثية المجسمة بتعين المجسمة الرباعية لانها تنقسم
الى ثلاثين

واما زاوية مستوي اسم γ و δ فتعين بواسطة الزاوية المجسمة الثانية
الجزئية واما الزاوية الكلية التي بين مستوي γ و δ فتساوي
مجموع ما بين مستوي α و δ وما بين مستوي α و γ
الجزئيين

وكذا يقال في المجسمة التي لها خمسة اوجه فلا بد من تعيين اثنين من انحرافاتهما
فضلا عن ان تكون زواياها المسطحة معينة وكذلك في المجسمة التي لها ستة اوجه
فلا بد فيها من ثلاثة انحرافات معلومة فضلا عن ان تكون زواياها المسطحة
معينة وهكذا على التوالى يجرى العمل المذكور

(المقالة السادسة)

في بيان الاجسام المحاطة بسطوح مستوية

المحدود

حدد ١ كل جسم محاط بسطوح مستوية يسمى كثير السطوح أو كثير القواعد وهذه السطوح لابد ان تحاط بخطوط مستقيمة وتكون وجوها لكثير السطوح فثما ما كان له اربعة اوجه ويسمى ذا اربع قواعد وما له ستة يسمى ذات قواعد وما له ثمانية يسمى ذا ثمان قواعد وما له ثنا عشر يسمى ذا اثني عشرة قاعدة وما له عشرون يسمى ذا عشرين قاعدة

ذو الاربعة القواعد هو مجرد كثير السطوح * لان الزاوية المجسمة اقل ما يلزم لتشكيلها الاربعة مستوية ويبقى انفتاح فلاجل انغلاقه احتيج الى رابع مستوي الفصل المشترك بين وجهي كثير السطوح يسمى ضلعاً أو حداً أو حرفاً
٣ الجسم الذي جميع وجوهه اشكال مستقيمة الاضلاع منتظمة متساوية وجميع زواياه المجسمة متساوية يسمى كثير القواعد المنتظم وعدد جها خمسة اشهرت بالاشكال الافلاطونية وقد ذكرت في ملحقات المقالة السادسة والسابعة فتامل
٤ المنشور ما احيط بسطوح متوازية الاضلاع وكان طرفاه محدوين بشكليين مستقيمي الاضلاع متساويين ومتوازيين

(شكل ٢٠٠) مثلاً لاجل رسم هذا المنشور اذا كان احد وجهه اى شكل مستقيم الاضلاع ورسمت خطوط $ور$ و $دح$ و $حط$ الخ متساوية ومتوازية لاضلاع $ار$ و $بر$ و $ج$ الخ في مستوي مواز لمستوى $ار$ الخ فالشكل الحادث $دحط$ يكون مساوياً للشكل $ارح$ ده المستقيم الاضلاع المرقوم فاذا وصلت رؤس الزوايا المتناظرة من هذين الشكلين بخطوط $او$ و $س$ و $د$ الخ يصير جسم $ارح$ ده $دحط$ السطوح المحدود $ار$ و $س$ و $د$ الخ المتوازية الاضلاع منشوراً

- ٥ الشكلاّن المستقيما الاضلاع أر ح وه و ورح ط يسمىان قاعدة المشور وجميع السطوح المتوازية الاضلاع الانوسمى وجوه المشور وخطوط او و س ر و ح الخ المستقيمة المتساوية تسمى اضلاع المشور
- ٦ ارتفاع المشور هو البعد الذى بين القاعدتين أو العمود النازل من نقطة من القاعدة العليا على القاعدة السفلى
- ٧ اذا كانت اضلاع المشور او و س ر و ح الخ عمادا على مستوى القاعدة فهو قائم وكل واحد منها حينئذ يساوى الارتفاع والافه و ماثل ويكون ارتفاعه اصغر من ضلعه
- ٨ المشور الذى ثلثت قاعدته يسمى مثلثيا و ما تر بعث قاعدته يسمى مربعيا و ما تخصصت قاعدته يسمى مخمسيا و ما تسدست قاعدته يسمى مسدسيا وهكذا
- ٩ (شكل ٢٠٦) اذا كانت قاعده المشور متوازي الاضلاع وكانت كافة وجوهه ايضا متوازية الاضلاع يسمى متوازي السطوح وهو ما حصل من احاطة ستة اشكال متوازية الاضلاع وان كانت وجوهه متوازي السطوح مستطيلة يسمى متوازي المستطيلات
- ١٠ متوازي المستطيلات اذا تركب من احاطة ست مربعات متساوية يسمى مكعبا او ذات قواعد منتظمة
- ١١ (شكل ١٩٦) الاهرام جسم حاصل من احاطة مستويات متساوية خرجت من نقطة مـ وانتهت الى جميع اضلاع مستوى ا ر ح وه المستقيم الاضلاع ويسمى قاعده الاهرام ونقطة مـ تسمى رأس الاهرام و مجموع المثلثات ا م س ر و ح الخ يسمى اجنحة الاهرام أو سطوحه المضاعفة أو كافة وجوه الاهرام
- ١٢ ارتفاع الاهرام هو العمود النازل من رأسه على قاعدته أو على المستوى المئتمنها
- ١٣ الاهرام الذى ثلثت قاعدته يسمى مثلثيا والذى تربعت قاعدته يسمى مربعيا و هلم جرا انظر الى قاعدته
- ١٤ اذا كانت قاعده الاهرام شكلا مستقيما الاضلاع منتظما وكان العمود

١٩ تقطع رؤس الزوايا المجسمة من كثير السطوح نسمى رؤس كثير السطوح اعلم ان ما ذكر من كثير السطوح في هذا الباب هو ما كانت جميع زواياها مستخرجة وهو المذهب وقد ذكره يصفه في السطوح بما لا يقطعها المستقيم الا في نقطتين فقط فكذلك ما كان ههنا من الاجسام الكثيرة السطوح فانه اذا امتد احد وجوهه فلا يقدح جسمه ابدا ولا يمكن وقوع جزء من الجسم فوق ما احاطه من مستووال آخر تحته فلذا اقام الجسم يقع في احدى جهتي المستوي الذي يحيط به

• (الدعوى الاولى النظرية) •

كثير السطوح لا يمكن اتحادهما عددا ولا تكون رؤسهما عينيا ما لم ينطبقا فاذا فرض وجود احد كثيرى السطوح حاضرا وأريد اعمال آخره رؤس رؤس رؤسه متحدة في العدد فلا بد ان يمر كل مستو مما يرا دعامه بعين نقط كل مستو مما كان حاضرا والازم التحالف بينهما ولكن ان لم يمر كل مستو من ذات تلك النقط فيقتضى ان تكون المستويات المرقومة تقطع كثير السطوح الاول وتكون رؤسه بعضها فوق المستويات القاطعة وبعضها تحته وهذا بخلاف ما ذكر في المقدمة فاذا وجب انطباق كثيرى السطوح واتحاد زواياهما عينيا وعدد

فيه وهم كثير السطوح من نقط $أ و ب و ج و د$ ك الخ رؤسه المعينة المتطورة معلومة وكذا اضلاعه لاعمره فيه

اولا (شكل ٢٠٤) فاذا اتخبت ثلاث نقط $د و ه و ح$ متجاورات وهم منها بمستوى $ده$ فكذلك يمر بنقطتي $ك و ج$ الاخرين ولا بد ان يكون جميع تلك النقط واقعة في احد طرفي مستوى $ده$ أو $ده$ ك $ج$ فيكون احد وجوه الجسم الكثير السطوح

ثانيا اذا مر بمستوى آخر على ضلع $ده$ احد اضلاع ذلك المستوى ودور حتى صادف نقطة $و$ الاخرى أو تنطبق $و ط$ فمستوى $ده$ أو $ده$ ح ط يكون الوجه الثاني من كثير السطوح وهلم جرا حتى يتم رسمه فهذا هو كثير

السطوح المطلوب لانه لا يكون جسمان اتزان مع اتحد الرؤس

• (الدعوى الثانية النظرية) •

في كثيرى السطوح المتماثلين تكون الوجوه المتناظرة متساوية والميل والانحراف بين كل اثنين متجاورين من الوجوه في احدهما مساويا لتظهيره في الآخر

(شكل ٢٠٥) مثلا اذا كان مستوى $ا-ب-ج$ قاعده مشتركة بين كثيرى السطوح وكانت نقطتا $م$ و $ن$ زاويتي احدهما المجسمين و $م$ و $ن$ نظيرتيهما في الآخر فعلى ما ذكر في تعريف المتماثل بصير خطا $م-ن$ و $ن-م$ عمودين على مستوى $ا-ب-ج$ وينقسمان بتساويين في نقطتي $ك$ و $ل$ ملتقيهما بالمستوى المرقوم فاذا كان الامر كاذبا يصير بعد $م$ مساويا لبعده $ن$ لانه اذا دور شبه منحرف $ك-م-ن$ حول كل حقي ينطبق على مستوى $ك-م-ن$ فضع $ك-م$ ينطبق على مساويه $ك-ن$ ويقع ضلع $ل-ن$ على $ل-ك$ وذلك لتساوي زاويتي $ك$ و $ل$ ولتساوي تلك الاضلاع فعدان فلذا صار $م-ن = ن-م$ لمطابقة شبه المنحرف تماما وايضا يصير $م-ن = ن-م$ و $ن-م = م-ن$ كاثبت اننا المتناظر بجسمه $م$ العليا المجسمة $ن$ السفلى فاي مثلث مثل $م-ن-س$ حاصل بوسائل رؤس المجسمات العليا يساوي مثلث $م-ن-س$ الحداث بوسائل السفلى ومن هذه المثلثات المرقومة اذا نظرنا الى ما كان مشكلا في وجوه كثيرى السطوح خاصة يتبين ان تلك الوجوه تر كبت من مثلثات متساوية متناظرة قد اتحد عددها ومن المثلثات المرقومة ما اذا وقعت على مستوا واحد وتشكل منها وجه من كثيرى السطوح فنظائر هاس المثلثات بها يتشكل وجهه كثيرى السطوح الآخر النظير للاول

فاذا فرضنا مثلثي $م-ن-س$ و $ن-م-س$ المتجاورين في مستوا واحد وكان مثلثنا $م-ن-س$ و $ن-م-س$ نظيرى الاولين تكون زاوية $م-ن-س = ن-م-س$

وزاوية $س د و$ = $س د و$ فاذا وصل $م د$ و $م و$ فثلث $م د و$
 يساوي مثلث $م د و$ فزاوية $م د و$ = $م د و$ ولكن حيث ان شكل
 $م د و$ واقع على مستوا واحد تكون زاوية $م د و$ = مجموع $م د س$
 + $س د و$ وايضا $م د و$ = $م د س$ + $س د و$ فان لم تحتل $م د س$
 و $س د و$ و $م د و$ وتصبح مستويا واحدا حدث منها زاوية بحجة

واذا لم ان تكون زاوية $م د و$ > $م د س$ + $س د و$ (٢٠ مقالة)
 وهذا محال لانه قد ثبت ان زاوية $م د و$ = $م د س$ + $س د و$ والتساوي
 وعدمه بين كيتين ممنوع فوجب وقوع مثلثي $م د س$ و $س د و$ على
 مستوا واحد

فقد ظهر من هذا الاثبات ان الاشكال كثيرة السطوح المقالة تصور جسمين
 متناظرين متحدة العدد متوافقة متساوية سواء كانت تلك المسطحات مثلثية
 او اى شكل مستقيم الاضلاع اما الشق الاول من هذه الدعوى فقد ثبت واما
 تساوي الانحرافات المتناظرة فاثباته سيأتى

مثلا نقول ان مثلثي $م د و$ و $س د و$ مرسومين في مستويين وجسمي كثير
 السطوح المتجاورين على $س د$ الحرف المشترك ومثلثا $م د و$ و $س د و$
 متناظران لهما وحيث يمكن تصور تشكيل زاوية بحجة في نقطة $د$ بمسطحات
 $م د و$ و $م د س$ و $س د و$ الثلاثة واخرى في نقطة $د$ بسطوح $م د و$
 و $م د س$ و $س د و$ الثلاثة الاخرى وقد ثبت تساوي هذه المسطحة على التناظر
 كما في الشق الاول من هذه الدعوى فعلم ان الانحراف بين مستويي $م د س$
 و $س د و$ مساو للانحراف بين مستويي $م د س$ و $س د و$ نظرا ليرهما
 (٢٢ مقالة) فعلم من الشطر الاول والثاني من هذه الدعوى ان كل جسمين
 كثيري السطوح متناظرين تكون وجوههما المتناظرة متساوية ويكون كل

انحراف بين مستويين وجسمي احدهما مساويا للتظير في الآخر
 تنبيه تماثل كل زاويتين جسميتين متناظرتين من هذين الجسمين لان زاوية $د$

المجمعة كما رسمت بمستويات م د س ه و و د س الخ
فكذلك زاوية د نظيرتها تشكلت بمستويات م د س ه و س د و و د س ه
الخ فكانت بمجمعة د وقعت على وضع ترتيب الأخرى ولا تزال مماثلة للأخرى
وان كانت مقابلة الوضع قطرا الأخرى وذلك لتساوى الانحرافات المتناظرة
على التوالي (مقالة ٥ تنبيه ٣٢)

فقد ظهر من هذا التقييد أن كثيرا من السطوح لا يمكن أن تكون واحدة قطعا لأنه لو انشأ في
مثيل آخر على قاعدة أخرى لتساوت جميع أبعادها بأبعاد المثل الأول مع اتحاد
الوضع فيهما وإذا صار عينه

• (الدعوى الثالثة النظرية) •

يتساوى المنشوران إذا تركبت آحاد زواياهما المجمعتان من ثلاث سطوح
متساوية بالنظر مستوية متشابهة الوضع

(شكل ٢٠٠) مثلا إذا كان في المستويات التي أحاطت زوايا ب ق ر و ر
المجمعتين قاعدة أ ر ح ه مساوية لقاعدة أ ر ح ه ومتوازي الاضلاع
أ ر و مساويا لمتوازي الاضلاع أ ر د و ومتوازي الاضلاع ر ح د
مساويا لمتوازي الاضلاع ر ح د يكون منشور أ ر ح ط مساويا لمنشور
أ ر ح ط

لأنه إذا وضعت قاعدة أ ر ح ه على مساويتها أ ر ح ه فينطبقان تماما
وحيث أن الزوايا المسطحة الثلاث التي تحيط بزوايا ر المجمعة مساوية
لنظائرها التي تحيط بزوايا ر يعني أ ر ح = أ ر ح و أ ر د = أ ر د
و ر ح د = ر ح د ولتساوية الوضع كانت زوايا ب ق ر و ر المجمعتان
متساويتين ومن ثمة يقع ضلع ر ر على مساوية ر د ويلائم من تساوى
متوازي الاضلاع أ ر و و أ ر د أن يقع ضلع ر و على ضلع ر و وأيضا
ضلع ر ح على ضلع ر ح ولوجود التساوى بين قاعدتي المنشورين السفليين

يلزم التساوى بين قاعدتيهما العلين ولطابقة مثنى الاضلاع من قاعدتيهما العلين يلزم انطباقهما كلياً اعني ان تكون قاعدة وروح طء العلين منطبقة على قاعدة وروح طء الاخرى تماماً فعلى هذا صار الجسمان المرقومان متشدي الرأس عدداً وعينا وصاراً جسماً واحداً (الاولى)

نتيجة يتساوى المنشوران القائمان اذا تساوت منهما القاعدة والارتفاع لانه من تساوى القاعدتين يلزم ان يكون ضلع $ا$ مساوياً لضلع $ا$ وحيث فرض تساوى ارتفاع $ر$ بارتفاع $ر$ فمستطيل $ا$ $ر$ و $ا$ $ر$ مستطيل $ا$ $ر$ وايضاً مستطيل $ر$ $ح$ يساوى مستطيل $ر$ $ح$ فالثلاثة المستوية المحيطة بزاوية $ر$ ساوت الثلاثة المحيطة بزاوية $ر$ فعلى منطوق الدعوى صار المنشوران المرقومان متساويين
 • (الدعوى الرابعة النظرية) •

في كل جسم متوازي السطوح المستويان المتقابلان متساويان ومتوازيان * فعلى تعريف هذا الجسم حيث ان قاعدتيه $ا$ $ر$ و $ه$ وروح متوازيان الاضلاع متساويان واضلاعهما متوازية وبما ثبت تساوى وتوازي الوجوه المتطرفة فهو $ا$ $ه$ و $ر$ $ح$ المتقابلين الواقعة بين تينك القاعدتين وتوازي اضلاع شكل $ا$ $ر$ $ح$ يكون ضلع $ا$ $ه$ مساوياً وموازياً لضلع $ر$ $ح$ وايضاً لتوازي اضلاع شكل $ا$ $ر$ $ه$ يصير ضلع $ا$ $ه$ موازياً ومساوياً لضلع $ر$ $ح$ فلذا كانت زاوية $ا$ $ا$ $ه$ مساوية لزاوية $ر$ $ر$ $ح$ (١٣ مقالة) ومستوى $ا$ $ا$ $ه$ موازى للمستوى $ر$ $ر$ $ح$ فيكون متوازي الاضلاع $ا$ $ا$ $ه$ مساوياً لتوازي الاضلاع $ه$ $ر$ $ح$ وكذا يثبت تساوى وتوازي متوازي الاضلاع $ا$ $ر$ $ه$ و $ر$ $ح$ الاخيرين وبه ثبت المطلوب

نتيجة حيث ان متوازي السطوح قد اخبط بستة مستويات منها كل اثنين متقابلين متوازيان ومتساويان قد امكن اقتضاؤ أى وجه من وجوهه أو مقابلته قاعدة

منشورين مثلثين متقابلين نحو $ا د ح ه و$ و $ر ح و د$
 أولا هذان الجسمان يكونان منشورين لان مثلثي $ا د ح$ و $ه و د$ متساويان
 لتساوي وتوازي اضلاعهما ثانيا حيث ان الوجوه المتطرفة $ا د و ه$ و $ا د ح$
 و $ر ح و$ متوازية الاضلاع فالجسمان المرقومان يكونان منشورين متقابلين
 لان منشور $ا د ح ه و$ يرسم على قاعدة $ا د$ بان يكون مماثل لمنشور
 $ا د ه و ح$ ومستوى $ا د و ه$ مساو لمستوى $ا د و ه$ لما صرح به
 في الدعوى الثانية وكذا مستوى $ا د ح ه$ مساو لمستوى $ا د ح ه$ وإذا
 صار التقدير بين منشوري $ر ح و د$ و $ا د ح ه و$ تكون قاعدة
 $ر ح و$ مساوية لقاعدة $ا د$ ومتوازي الاضلاع $ر ح و د$ يساوي
 $ا د و ه$ و $ا د و ه$ وأيضا متوازي الاضلاع $ر و د$ يساوي متوازي
 الاضلاع $ا د ح ه$ ومساوية $ا د ح ه$ وحيث ان المستويات الثلاث المحيطة
 بزواوية $ر$ الجسم في منشور $ر ح و د$ تساوي نظائرها الثلاث التي تصور
 زواوية $ا$ الجسم في منشور $ا د ح ه و$ ولتشابه الوضع في كل منهما يتساوى
 ذانك المنشوران تطابقا وانماثل $ا د ح ه و$ أحدهما من المنشورين منشور
 $ا د ح ه و$ يكون $ر ح و د$ المنشور الآخر مماثل لمنشور $ا د ح ه و$
 وبثبت المطلوب

(الدعوى السابعة النظرية)

(شكل ٢٠١) في كل منشور $ا د ح ط$ مقاطع $ك ل م ن$ و
 $و ع ف ه ن$ الحادثة من المستويات المتوازية تكون اشكالا مستقيمة
 الاضلاع متساوية

لان ضلعي $ك ل$ و $و ع$ المتوازيين فصلان مشتركين بين المستويين
 المتوازيين وبين $ا د و$ المستوى الثالث ولوقوعهما بين ضلعي المنشور
 $ر ح و$ و $ك ل$ يكون شكل $ع ك ل ف$ متوازي الاضلاع فلذا صار $ك ل$
 $= و ع$ وبمثل هذا يثبت ان $ل م و م ن و ن ه$ و $ه ا$ مقاطع

كلم دس تساوى ف صه و صه و دس الخ اضلاع مقطع
ع ف صه س على التوالى ولوجود التوازى بين هذه الاضلاع فضلا عن
التساوى تكون كلم ولم د الخ زوايا المقطع الاول تساوى ع ف صه
و ف صه د الخ زوايا المقطع الثانى على التوالى ومن ثمة ظهر ان الاضلاع
والزوايا من مقطعى كلم دس و ع ف صه دس صارت متساوية على
التناظر وثبت المطلوب من أن يكونا متساويين
نتيجة كافة المقاطع التى أنشئت موازية لقاعدة المنشور تكون مساوية لها
(الدعوى الثامنة النظرية) *

(شكل ٢٠٨) المنشوران المثلثان المتماثلان ا سوه هـ و سوه د دورح
المركب منهما اى متوازى السطوح ا د هما متكافيان
فاذا قسم مستويا سأد و دهع ر من رأسى سوه و هـ د ا على ضلع سوه
فبالتقيان باضلاع ا هـ و دح و دح ر الثلاثة من المنشور المرقوم بنقط ا و د و ح
فى أحد طرفيه وبنقط هـ و ع و ر فى طرفه الآخر وحيث ان مقطعى سأد
و دهع ر هما د ا على مستقيم واحد يكونان متوازيين وبما صرح به فى الدعوى
التى تقدمت يكونان متساويين وان أس و دح ضلعي أحدهما المتقابلين
فصلا مشتركان بين مستويي ا سوه و دح دورح المتوازيين وبين المستوي
الاخر فيكون كل واحد من المقطعين متوازى الاضلاع وكذا ثبت ان يكون
شكل سأه متوازى الاضلاع ولتوازى اضلاع وجوه سوه و دح دورح
و أدع هـ المتطرفة الاخرى من جسم سأد و دهع ر يكون منشورا
(حدد ٤) وقائم الوقوع ضلع سوه و هـ د ا على قاعدتيه فاذا قسم منشور
 سح القائم بمستوى سوه د الى منشورين مثلثين قائمين أسه و دهو
و سده و دع فالتشور المثلثى ا سدهو المائل يكافى منشور أسه و دهو
المثلث القائم وحيث ان قسم ا سوه هـ مشترك بينهما فالحجبك اثبات
التساوى بين القسمين الاخرين اعنى سأد و دهع ر فاقول

حيث ان وجهي $ا ر د ه$ و $ا د و ه$ متوازي الاضلاع وتساوي كل من ضلعي $ا ه$ و $ا ه$ بطلع $ر$ و الموازي لهما فيكونان متساويين فاذا طرح منهما $ا ه$ المشترك يبقى $ا ا = ه ه$ وبذلك يثبت ان يكون $د و = ح ح$ وان تصور تطابق جسمي $ر ا ا د$ و $و ه ه ح$ بان تأتى قاعدة $و ه ح$ على مساويتها $ر ا د$ فتقع نقطة $ه$ على نقطة $ا$ ونقطة $ح$ على $د$ وضلعا $ه ه$ و $ح ح$ على مساويهما $ا ا$ و $د د$ * لان هذه الاضلاع عماد على مستوى $ر ا د$ نفسه فعلى هذا ينطبق الجسمان المرقومان اتحادا ومنشور $ر ا د و ه ح$ المائل يكافى منشور $ر ا د و ه ح$ القائم

واما اثبات تكافى منشوري $ر د و ح$ و $ر د و ح$ القائم والمائل فكما ذكر واما المنشوران القائمان $ر ا د و ه ح$ و $ر د و ح$ فتساويان لتساوي قاعدتيهما $ر ا د$ و $ر د و ح$ حيث انهم انصاف متوازي اضلاع واحد ولاشتراك ارتفاع $ر د$ بينهما (نتيجة ٣) فيلزم من مكافئته منشوري $ر ا د و ه ح$ و $ر د و ح$ والمثلثين المنشورين المتساويين ان يكونا متقاومين ويثبت المطلوب نتيجة كل منشور $ر ا د و ه ح$ والمثلث المنشأ على زاوية $ا$ الجسمة وعلى حروف $ا ر و ا ه$ المضلعة من متوازي السطوح $ا ر$ يكون نصفه
 • (الدعوى التاسعة النظرية) •

(شكل ٢٠٩) اذا كان متوازي السطوح $ا ر$ و $ا ل$ على قاعدة $ا ر د$ المشتركة وكانت قاعدتهما العليا $ه و ر$ و $ط ك ل م$ في مستوي واحد ومختصرتين بين خطي $ه ك$ و $ح ل$ المتوازيين فذا نك الجسمان يكونان متكافئين • وهي على ثلاثة احوال الاول اما ان يكون خط $ه ط$ اكبر من خط $ه و$ او مساويا له أو اصغر منه وبرهان الكل واحد
 اولاً منشور $ا ه ط$ ع المثلثي مساو لمنشور $ر و ك$ ل المثلثي • لان خط $ا ه$ مساو لخط $ر و$ و خط $ه ح$ مساو لخط $ر و$ وزاوية $ا ه ط = ر و ك$ وزاوية $ح ه ط = ر و ك$ وزاوية $ح ه ا = ر و ك$ فالثلاثة الاول

من هذه الستة المسطحة تصور زاوية هـ الجسمة والثلاثة الاخر تصور زاوية
و الجسمة الاخرى وهما متساويتان حيث تشكلتا من مستويات متناظرة
متساوية تشابهت أوضاعها • فاذا توهم تطبيق منشور ا هـ م على منشور
رول ووضع قاعدة ا هـ ط على قاعدة روك فهاتان القاعدتان يطبقان
لما بينهما من التساوي ولوقوع ضلع هـ ج على مساويه ور اتساوي مجتمعي
هو و • ينطبق أحد المنشورين على الاخر في جميع الامتداد ولا حاجة لبرهان
غير هذا • لانه كما تبين منشور ا هـ م بقاعدة ا هـ ط وحرف هـ ج أيضا
يتعين منشور رول بقاعدة روك وحرف ور (٣) فلذا ثبت تساوي
المنشورين فاذا طرح من جسم ال منشور ا هـ م يبقى متوازي السطوح
ا ط ل وان طرح منه منشور رول يبقى متوازي السطوح ا هـ ر ومن
أجل ذلك تبين التكافؤ بين الجسمين ا ط ل و ا هـ ر متوازي السطوح
وثبت المطلوب

(الدعوى العاشرة النظرية)

الاجسام المتوازية السطوح المتحدة القاعدة والارتفاع تكون مكافئة
(شكل ٢١٠) مثلاً اذا كانت قاعدة ا ر د مشتركة بين متوازي السطوح
ا ر و ل ا فلا اتحاد الارتفاع فيهما فيكون قواعدهما العليا هـ و ر ج و ط ل م
على مستوي واحد فضلاً عن أن يكون ضلعاً هـ و و ا ر متوازيين متساويين
وكذا ضلعاً ط ل و ل م فيصير خط هـ و موازياً لخط ط ل ومساوياً له
وبمثل هذا يثبت التوازي والتساوي بين خطي ر و ل لـ فاذا امتد ضلعاً
هـ و و ج ر وضلعاً لـ و ط م على الاستقامة حتى يحدث بالتقاطع م وقاطعهم
متوازي الاضلاع د هـ ج ر يكون مساوياً لكل من قاعدتي هـ و ر ج
و ط ل م كما لا يخفى فاذا تصور متوازي سطوح ثالث آخر وقاعدته السفلى
ا ر د والعليا د هـ ج ر فكذلك هذا الجسم المتصور يكافئ متوازي السطوح
ا ر (٩) لاتحاد قاعدتيهما السفليتين واستواء قاعدتيهما العلويتين على مستوي
واحد محصورتين بين خطي ر و د و المتوازيين وبمثل هذا ثبت تكافؤ

متوازي السطوح الثالث المرقوم لتوازي السطوح الـ ومن ثمة تبين
تكافؤ متوازي السطوح ا د و ال وثبت المطلوب

• (الدعوى الحادية عشرة النظرية) •

كل متوازي السطوح يمكن تحويله الى متوازي المستطيلات المكافئ له الذي
ارتفاعه عين ارتفاعه وقاعدته مقاومة لقاعدته

(شكل ٢١٠) اذا فرض ان كثير السطوح المقروض ار ورسم متوازي
السطوح الـ باقاعته عماد ا ط و س و ح و د م على مستوى القاعدة
من نقط ا و س و ح و د مقاوما لتوازي السطوح ار تكون وجوه و س د
الخ اطراف متوازي السطوح المرصوم مستطيلة فان كانت قاعدته ار ح د
مستطيلة صار جسم الـ متوازي المستطيلات مكافئاً لتوازي السطوح
المقروض ار هذا • وان لم تكن قاعدة ار ح د مستطيلة

(شكل ٢١١) فاقول اذا انزل عمودا او و س د على ح د وأخرج عمودا
و ك و ه س د على القاعدة فجسم ار ح د و ط س د ك الحادث يكون متوازي
المستطيلات • لان قاعدتيه ار ح د و ط س د المتقابلتين مستطيلتان
متساويتان وحيث ان ا ط و و ك الخ حروف الوجوه المتطرفة عماد على
مستوى القاعدة تحققت استقامة الوجوه وثبت ان يكون جسم ار ح د متوازي
المستطيلات ولكافئته متوازي السطوح الـ لالتحاد قاعدة ار ح د
وارتفاع او فيهما (١٠) ومن قبل قد تحول متوازي السطوح ار الى متوازي
السطوح الـ مكافئاً ثم تحول الى متوازي المستطيلات ار ه الذي قاعدته
ار ح د ومقاومة لقاعدة ار ح د وارتفاعه ا ط عين ارتفاعه ومن ثمة ثبت
المطلوب من امكان تحويل متوازي السطوح الى جسم متوازي المستطيلات
المكافئ له

• (الدعوى الثانية عشرة النظرية) •

(شكل ٢١٢) متوازي السطوح ا د و ال الواقعان على نفس قاعدة ار ح د

النسبة بينهما كالنسبة بين ارتفاعهما أه واط
أولاً إذا فرض أن نسبة الارتفاعين كسبعة عدد ١٥ الى عدد ٨ فحينئذ
ينقسم ارتفاع أه الى خمسة عشر جزءاً متساوية يتخوى ارتفاع اط على
ثمانية منها فإذا مرر بمستويات موازية للقاعدة من نقاط التقسيم هـ و صـ و ذ
الخ فهذه المستويات تقسم جسم ار الى خمسة عشر عدداً متوازي السطوح
وهي متساوية لتساوي قاعدتها والارتفاع فتساوي القواعد نظراً لما ذكرنا
المقاطع مثل ط م ط ك كل الموازية للقاعدة في منشور تكون متساوية (٧) وأما
تساوي الارتفاع فتساوي اـ هـ و صـ و هـ ذ أقسام الارتفاع فلذا
تساوت متوازية السطوح الخمسة عشر ومتوازي السطوح الـ يتخوى
على ثمانية منها ومن ثمة كانت نسبة جسم ار الى جسم الـ كسبعة عدد
١٥ الى عدد ٨ أو كنسبة ارتفاع أه الى ارتفاع اط

الصورة الثانية وإن لم يتفاوت ارتفاعا أه واط على عدد صحيح فلا تزال أيضا نسبة
جسم ار : جسم الـ :: أه : اط هذا * فان قيل إن ذلك التناسب
ليس بمطلوب وفرض كون نسبة ار : الـ :: أه : اـ ع فينقسم خط أه
الى أقسام متساوية يكون كل واحد منها أصغر من مقدار ط ع فاقبل ما يقع
من نقاط التقسيم بين ط و ع نقطة صـ فاذا سمى متوازي السطوح الذي
قاعدته اـ حـ و ارتفاعه اـ صـ * فـ ومن كون النسبة بين ارتفاعي
أه و اـ هـ كالنسبة بين العددين الصحيحين تكون نسبة جسم ار الى جسم
ف كنسبة أه الى اـ هـ وقد زعم أن جسم ار : الـ :: أه : اـ ع
فيصدر عنهما هذا التناسب وهو الـ : فـ :: اـ ع : اـ هـ وإذا لزم أن
يكون جسم الـ أكبر من جسم فـ حيث أن مقدار اـ ع أكبر من مقدار
اـ هـ والحق بخلافه لأنه أصغر * ومن ثمة امتنع أن يكون الحد الرابع
من هذا التناسب أعنى جسم ار : جسم الـ :: أه : اـ هـ : ثم أكبر من
مقدار اط وبمثل هذا امتنع أن يكون أصغر منه بل يساويه وثبت المطلوب
من أن تكون النسبة بين متوازي السطوح متعادى القواعد بأي حال كانت

كالنسبة بين ارتفاعيهما

• (الدعوى الثالثة عشرة النظرية) •

(شكل ٢١٣) متوازيات المستطيلات $ا د ر ا ن$ متعدا الارتفاع $ه ا$ تكون

النسبة بينهما كالنسبة بين قاعدتيهما $ا د و$ و $ا م و$

فعلى ما يرى من هذا الشكل اذا وضع أحدهما في جانب الآخر وامتد مستوى

$ع د ن$ لـ حتى يلاقى مستوى $د و ر ع$ في $ف ك$ يحدث متوازي

المستطيلات $ا ه و$ وبه يمكن تقدير كل واحد من متوازي المستطيلات $ا د ر ا ن$

فاقول لاتحاد القاعدة $ا ه و$ في جسمي $ا د ر ا ك$ كانت النسبة بينهما

كالنسبة بين ارتفاعيهما $ا ع$ و $ا ب$ وأيضا لاتحاد قاعدة $ا ع ل ه$ في جسمي

$ا ك و$ ان كانت النسبة بينهما كالنسبة بين ارتفاعيهما $ا د$ و $ا م$ فلذا

صار جسم $ا ر$: جسم $ا ك$:: $ا ب$: $ا ع$ وجسم $ا ك$: جسم

$ا ن$:: $ا د$: $ا م$ فاذا ضربت حدود هذين التناسين بالترتيب وحذف

جسم $ا ك$ المشترك في الحاصل تكون نسبة جسم $ا ر$: $ا ن$:: $ا ب$: $ا م$

$ا د$: $ا ع$ $ا م$ وحيث ان $ا ب$ $ا د$ $ا م$ عنوان لقاعدة $ا د و$

و $ا ع$ $ا م$ عنوان لقاعدة $ا م و$ ثبت المطلوب من ان تكون النسبة

بين متوازي المستطيلات المتعدى الارتفاع كالنسبة بين قواعدها وقد سلف

عكسها

• (الدعوى الرابعة عشرة النظرية) •

أي متوازي المستطيلات تكون النسبة بينهما كالنسبة بين حاصلهما الحادئين

من ضرب قاعدة كل في ارتفاعه أو من ضرب الابعاد الثلاثة في كل منهما

(شكل ٢١٣) اذا وضع احد جسمي $ا د و$ اسم متوازي المستطيلات في جنب

الآخر بان تكون زاوية $ا ه و$ مشتركة في وجه الجسمين ثم يمتدنا بآلزم انخواجه

من المستويات ويرسم متوازي المستطيلات $ا ن$ الثالث بان يكون ارتفاعه

مساويا لارتفاع متوازي المستطيلات $ا د$

فاقول على ما صرح به في الدعوى السابقة يكون جسم $ا ر$: $ا ن$:: $ا د و$

: ام د ع ولا اتحاد قاعدة ام د ع في متوازي المستطيلات ان و اس
 كانت النسبة بينهما كالنسبة بين ارتفاعي اه و اصه اعني ان جسم
 ان : جسم اسه :: اه : اصه فاذا ضربت خدود هذين التماسين
 بالترتيب وحذف المضروب فيه المشترك وهو جسم ان يكون جسم اد :
 جسم اسه :: اسه د خ اه : ام د ع خ اصه فاذا وضع اس
 خ اه و اع خ ام عنوان كل من القاعدتين مقامهما كان جسم اد
 : جسم اسه :: اسه د خ اه : اع خ ام خ اصه ومن
 ذلك ثبت المطلوب من ان تكون النسبة بين متوازي المستطيلات كالنسبة
 بين حاصل ضرب قاعدة كل في ارتفاعه أو ضرب الابعاد الثلاثة من كل منهما
 تنبيه لاجل اخذ مساحة متوازي المستطيلات او قياسه يمكن ان يؤخذ حاصل
 ضرب قاعدته في ارتفاعه او حاصل ضرب ابعاده الثلاثة لما استبان من اثبات
 هذه الدعوى وتلك الطريقة صار يؤخذ بها مساحة كافة الاجسام ولادراك
 هذه المساحة كما ينبغي يقال ان المراد من حاصل ضرب خطين أو أكثر هو حاصل
 ضرب الاعداد الحسائية التي تقوم مقام تلك الخطوط وحيث ان هذه الاعداد
 توافق الاحداث الخطي في كل حال أمكن ان تؤخذ كيفما اتفق فاذا كان الامر
 كما ذكره لم ان الاعداد الحاصلة من ضرب الابعاد الثلاثة من أي متوازي
 المستطيلات لا تنفذ شيأً وحدها حيث لو قيس تلك الخطوط بالاجد الخطي
 غير الذي تقدم يظهر وقوع الخلاف بين ما يحصل من العدد وبين ما تقدم واما
 اذا قيس متوازي المستطيلات الاخر بالاحد الخطي الذي قيس به الاول
 وضربت الابعاد الثلاثة منه في بعضها فحينئذ تكون نسبة الحاصلين كنسبة
 الجسمين ويحصل من الحواصل الصادرة عن الاعداد كما ذكره ويجري مجرى
 اجسامها فاقامل

جرم الجسم هو مساحته التي جعلت له منشأ وتسمى المساحة الجسمية بالجنة وهو
 ما لا زوا الجسم من الفراغ واستعملت عليه المساحة الجسم حيث يقال المساحة
 الجسمية لمتوازي المستطيلات واختصار الالاقاة يقال جسمه اعني حاصل ضرب

فاعدته في ارتفاعه

اعلم ان المراد عن الجسم الذي يذكر في أصول الهندسية هو الجسم التعليمي الذي لا يبحث فيه عن كنهه ولا عن اجزائه المادية بل يبحث فيه عن امتداداته أي ابعاد الثلاثة ويسمى البحث في الجسم من حيث انه جسم لا من حيث ادراكه الكنه لان ذلك يتعلق بعلم الطبيعة كما لا يخفى

حيث ان اضلاع المكعب الثلاثة متساوية فان كان ضلعه واحدا للجسمه ١ $1 \times 1 \times 1$ يعني ١ وان كان اثنين لجسمه ٢ $2 \times 2 \times 2$ يعني ٨ وان كان ثلثه لجسمه ٣ $3 \times 3 \times 3$ يعني ٢٧ الخ فان كانت اضلاع المكعب ١ و ٢ و ٣ الخ فتكون مكعباتها اجسامها ١ و ٨ و ٢٧ الخ ومن هذا قد تبين في علم الحساب ان مكعب العدد هو ضرب ثلاثة امثاله في بعضها وان بدلت في ذلك افعال المكعب ضعف مكعب معلوم فيلزم استحضار جهه بان تكون نسبة ضلع المكعب المطلوب الى ضلع المعلوم كنسبة جذور مكعب عدد ٢ الى واحد وان تيسر جذور مربع عدد ٢ بعسديات الهندسة ولكن الى الان وجود جذور مكعب عدد اثنين بطريق اصول الهندسة بواسطة الدوائر التي علت اقطارها و مراكزها و الخطوط المستقيمة المعينة بمجرد ادراك نقطتي حدودها متجمع ومن اجل ذلك قد اشتمل افعال مكعب مساو لضعف مكعب آخر بطريق عمليات الهندسة ~~كما~~ اشهرت مسئلة تثليث الزاوية بين المهندسين المتقدمين لكن مثل هذه المسائل قد تبين حلها بطريق آخر وان كان حل ما وجد منها ليس بسهولة كطريق الهندسة لكن لا فرق بين الطريقين في عنوان المسئلة

اعلم ان تثليث الزاوية اعني تقسيمها الى ثلاثة اقسام متساوية على طريق اصول الهندسة غير ممكن عند المهندسين المتقدمين وعدت بينهم من المشكلات التي تحتاج الى حل وكذا اجتمع في حلها المهندسون المتأخرون فلم يكن بطريق اصول الهندسة الجارية ولكن قد تبين حلها بطريق الهندسة العليا هي علم تطبيق الجبر على الهندسة و بطريق انشاء القطع المكافئ واما ما ذكره الخليفة الاول بالهندس فانه التي بالقسطون طيبة المشهورة باسلامبول مصدريه بحى زاده حسين

افقدى في رسالة بخصوص ثلث الزاوية بطريق الهندسة فانه باطل لا يعمل به
حيث لم يثبت له صحة وحيث لا فائدة في وجودها بطريق الهندسة لكونه من
قبيل تحصيل ما هو حاصل قد سقطت تلك المسئلة من درجة الالتفات بين علماء
الهندسة

• (الدعوى الخامسة عشرة النظرية) •

جسم متوازي السطوح وعموما كل جسم منشور مساو لحاصل ضرب قاعدته
في ارتفاعه

اولا لان متوازي السطوح مكافئ لمتوازي المستطيلات الذي قاعدته عين
قاعدته وارتفاعه كذلك (١١) فحين ان جسم متوازي السطوح مساو لحاصل
ضرب قاعدته في ارتفاعه حيث ان جسم متوازي المستطيلات كذلك
ثانيا كل منشور مثلثي يكون نصف المنشور الذي انشئ وقاعدته ضعف قاعدته
وارتفاعه عين ارتفاعه فحين ان جسم المنشور المثلثي مساو لحاصل ضرب
قاعدته في ارتفاعه حيث ان جسم متوازي السطوح مضاعفه مساو لحاصل
ضرب ضعف تلك القاعدة في ذلك الارتفاع

ثالثا ان كل منشور جسمه مساو لحاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه حيث يمكن
تقسيمه الى منشورات متساوية متحدة الارتفاع بعدد المثلثات التي احتوت عليها
قاعدته وجسم كل منها مساو لحاصل ضرب قاعدته الجزئية في الارتفاع المشترك
فكان مجموع المنشورات مساو لحاصل ضرب مجموع المثلثات التي اتخذت
قواعدها في الارتفاع المشترك فصارت مساحة اي منشور تساوي حاصل ضرب
قاعدته في ارتفاعه وثبت المطلوب

نتيجة المنشورات المتحد الارتفاع النسبة بينهم كالتسبة بين حواصل ضرب
القواعد في الارتفاع او كنسبة القاعدتين حيث ان قواعد المنشورات المتحد
الارتفاع تجري مجرى اجسامها وايضا اذا اتخذت القاعدة بين المنشورات
فالتسبة بينها كالتسبة بين ارتفاعاتها

• (الدعوى السادسة عشرة القاعدة) •

الخارجية أكبر من هرمها سـاـرـه وبمجموع المنشورات الداخلية أصغر
من هرمها سـهـأـرـه لزم أن يكون الفرق بين المجموعين من المنشورات أكبر
من التفاضل بين الهرميين المرقومين

فأقول ابتداء من جهة قاعدة سـاـرـه و سـهـأـرـه أن المنشور الخارج الثاني
دهور من الهرم الأول يكافئ المنشور الأول الداخل دهوراً من الهرم
الثاني لتكافؤ قاعدتي دهور و دهور فيهما واتحاد ارتفاع ق بينهما وبمثل
تكافؤ المنشور دح ط ك الثالث الخارج بمنشور دح ط د الثاني الداخلي
وكذا الرابع الخارج والثالث الداخلي يتكافئان وهلم جرا حتى الأخير فعلم من
هذا أن مجموع المنشورات الخارجية من هرم سـاـرـه غير منشور سـاـرـه
الأول مساو بمجموع المنشورات الداخلية من هرم سـهـأـرـه فكان
منشور سـاـرـه هو التفاضل بين المجموعين من منشورات كل من هرمي
 سـاـرـه و سـهـأـرـه وقد ثبت أننا ان الفرق بينهما أكبر من الفرق بين
الهرميين المرقومين وإذا كان منشور سـاـرـه أكبر من منشور سـهـأـرـه
المنشور بارتفاع أصه وليس كذلك بل بالعكس لأن ارتفاع أصه أكبر من
ارتفاع ق مع اتحاد قاعدة سـاـرـه فيهما فلا جرم أن يكون منشور سـاـرـه
أكبر من منشور سـهـأـرـه وهذا كدليل على بطلان ما فرض و ثبت المطلوب
من انه متى تقاومت القواعد واتحد الارتفاع في هرمي سـاـرـه و سـهـأـرـه
يكونان متكافئين

• (الدعوى الثامنة عشرة النظرية) •

كل هرم مثلي ثلث المنشور المثلثي إذا اتحد مع القاعدة والارتفاع
(شكل ٢١٦) أي إذا كان سـاـرـه هرمًا مثلثيًا و سـهـأـرـه منشورًا
مثلثيًا واتحد قاعدة وارتفاعا فالهرم ثلث المنشور
فإذا طرح هرم سـاـرـه من المنشور بقي جسم سـهـأـرـه هرمًا رباعيًا

قاعدته ا ح د ه و رأسه س فاذا وصل قطر د ه و من بمستوى س د ه
 ينقسم ذلك الهرم الى هرمين مثلثين ارتفاعهما هو الاعداد المشتركة النازل من
 رأس س على مستوى ا ح د ه وقاعدتهما مثلثا ا ح د ه و د ه ا لذان
 هما نصفاهما وتوازي الاضلاع ا ح د ه وتساويهما كان هرما س ا ح د ه
 و س د ه المرقومان متقاومين لكن هرما س د ه و س ا ح د ه قاعدتهما
 ا ح د ه و د ه س متساويتان والارتفاع واحد حيث انه الاعداد الحقيقي بين
 مستويي ا ح د ه و د ه س المتوازيين فوجب التكافؤ بينهما وقد ثبت آنفا
 ان هرم س د ه يقاوم هرم س ا ح د ه فلذا انكافأت الازهرام الثلاث
 س ا ح د ه و س د ه و س ا ح د ه التي تركب منها منشور ا ر د ه ومن ثمة
 ثبت المطلوب وهو ان يكون هرم س ا ح د ه ثلث المنشور الذي اتحد به قاعدة
 وارتفاعا

(نتيجة) مساحة اى هرم تساوى ثلث حاصل ضرب قاعدته في الارتفاع

• (الدعوى التاسعة عشرة النظرية) •

(شكل ٢١٤) كل هرم مخروطي س ا ح د ه ثلث حاصل ضرب قاعدته

ا ح د ه في ارتفاعه س د ه يساوى مساحته الجسمية

لانه اذا مر من قطري القاعدة ه س و ه د بمستوى س د ه و س ه د

ينقسم هرم س ا ح د ه الكثير المطروح الى اهرام مثلثة متعددة

يكون س د ه ارتفاعا مشتركا فيها والمساحة الجسمية من كل تساوى حاصل

ضرب كل من قواعد ا س ه و د ه و د ه في ثلث ارتفاع س د ه كخطوط

السابقة فكان مجموع مساحة الازهرام المثلثية أو الهرم الكثير المطروح

المرقوم مساويا لحاصل ضرب مثلثات ا س ه و د ه و د ه أو كثيرا لاضلاع

ا ح د ه في ثلث الارتفاع اعني $\frac{1}{3}$ س د ه ومن ثمة ظهر ان المساحة الجسمية

من كل هرم تساوى حاصل ضرب قاعدته في ثلث ارتفاعه ويجوز العكس

واخذ ثلث الحاصل

(نتيجة ١) كل هرم ثلث المنشور المتحد به قاعدة وارتفاعا

(نتيجة ٢) النسبة بين الهرمين المتحدى الارتفاع كالنسبة بين قاعدتيهما
والمتحدى القاعدة كالنسبة بين ارتفاعيهما

• (تنبيه) • كل جسم كثير السطوح يمكن تقديره بتحليل جسماته الى اهرام
ولهذا التحليل وجوه شتى أهونها اهرام المستويات التي تقسم الجسم من زاوية
مجموعة واحدة وحيث يقسم الجسم الكثير السطوح الى اهرام جزئية بعدد
ماله من الوجوه سوى التي تحيط بالزاوية المجمعة فتأمل

• (الدعوى العشرون النظرية) •

كثير السطوح المتماثلان متقاومان

(شكل ٢٠٢) نقول اولاً ان مساحتي هـ و هـ و ط ا س د المتماثلين
تكونان متكافئتين حيث كان ثلث حاصل ضرب قاعدة ا س د في الارتفاع
س د و أو م و مقدارا مشتركا فيهما

وثانياً كما يقسم احد كثيرى السطوح الى اهرام مثلثة فالآخر كذلك
يتقسم الى اهرام مثلثة مقاومة ومناظرة للاول فعلم ان كثيرى السطوح
المتماثلين يكونان متقاومين

تنبيه على ماصرح به في الدعوى الثانية من ان كثيرى السطوح المتماثلين كما
يتركب أحدهما من اجزاء يتركب الآخر كذلك من اجزاء تساوى ما في الاول
وهذه الدعوى عين الثانية وانما كروت تأ كيد البرهان

• (الدعوى الحادية والعشرون النظرية) •

اذا قطع الهرم بمستوي يوازي قاعدته وطرح الهرم الذي فوق المستوى القاطع
فالهرم الناقص اعنى ما تحت المستوى المرقوم مساحته تساوى مجموع ثلاثة
اهرام يشترك في الارتفاع الهرم الناقص وقواعدها الثلاث العليا منه والسفلى
وما كانت بينهما مواسطة متساوية

(شكل ٢١٧) مثلاً اذا كان هـ ا س د هـ هـ ا ق طع بمستوى ا س د
موازي القاعدته وكان م و ز هـ هـ ا مثلياً يكانه قاعدته وارتفاعه الخ حيث
لا مانع ان تكون القواعد منهن متساوية على مستوا واحد فاذا امتد مستوى ا س د

بعين مقطع و دَح في الهرم المثلث فيكون ارتفاع المقطعين عن مستوى القاعدةين واحدا فتكون النسبة بين مقطعي و دَح و أَسَد كالنسبة بين قاعدتي و دَح و أَسَد وبشكافي القاعدةين بشكافا المقطعان ويكون هـ رما س أَسَد هـ و م و دَح متكافئين لاتحاد القاعدة والارتفاع فيهما وحيث ثبت تكافؤ الهرمين الكليين فالباقيان اعني الهرمين الناقصين متكافئان فحسبك ما يجري من العمل على الهرم الناقص المثلثي كأنه اجري على الاول لما بينهما من التكافؤ

(شكل ٢١٨) فإذا كان و دَح ح و دَ هـ رما ناقصا وازت قاعداه ومرت بمستوى و دَح من ثلاث نقط و و دَ و ح يتفصل به من الجسم الاصلي هرم و دَح المثلثي وقاعدته هي السفلى من جسم و دَح ح و دَ المقروض وارتفاعه ارتفاعه حيث كانت رأس و نقطة من مستوى قاعدة و دَح العليا فيبقى من الجسم المرقوم هرم و دَح ح و دَ باي رأسه دَ وقاعدته شكل و دَح ح و دَ فإذا مرت مستوى و دَح من نقط و و دَ و ح الثلاث ينقسم ذلك الهرم الرباعي الى هرمي دَ و دَ و و دَ و ح الثلاثين الاخير منها قاعدته و دَح العليا من الجسم وارتفاعه عين ارتفاع الجسم حيث كانت رأسه ح نقطة من مستوى السفلى منه وبهذا علم من الثلاث اهرام التي تتركب منها الهرم الناقص اثنان وبقي هرم دَ و دَ ح الثالث المراد العلم به

فيرسم دَ ك موازيا لنقط و دَ ويتصور هرم و دَح ك جديد تكون قاعدته و دَح * ورأسه ك فهذان الهرمان تصدق فيهما قاعدة و دَح وكذلك الارتفاع * لوقوع كل من رأسي دَ و ك على خط دَ ك الموازي لنقط و دَ والمستوى القاعدة فظهر التكافؤ بين الهرمين باتحادهما قاعدة وارتفاعا لكن اداجعلت و دَ رأس الهرم و دَ ك لاجرم ان ارتفاعه هو ارتفاع الجسم المقروض فإذا صيرت و دَح ك قاعدة فتكون وسطا متناسبا بين قاعدتي و دَح و دَ دَح * لان في مثلتي و دَح ك و و دَح زاوية دَ = و

و ا ر ح د الابرار الثلاثة متكافئة وهرم ا ر ح د قد تكون قاعدته ا ر ح د
 ورأسه د ومن اجل ذلك صارت المساحة الجسمية من منشور ا ر ح د ه ر ه
 المقطوع يساوي مجموع ثلاثة اهرام تشتتل قواعدها ا ر ح د ورؤسها د
 و ه و ه وثبت المطلوب

نتيجة اذا كانت حروف ا ه و ر ح د عمادا على مستوى القاعدة
 فهي الارتفاعات للاهرار الثلاثة التي يتركب منها المنشور المقطوع وبجسمه
 يساوي $\frac{1}{3} \times \text{ا ه} + \frac{1}{3} \times \text{ا ر} \times \text{ر ح} + \frac{1}{3} \times \text{ا ر} \times \text{ح د}$
 د ولاشتراك $\frac{1}{3} \times \text{ا ر}$ في كل من المضروب تنحصر مساحته في $\frac{1}{3} \times \text{ا ر} \times$
 (ا ه + ر ح + ح د)

(الدعوى الثالثة والعشرون النظرية)

الهرمان المثلثيان المتشابهان متساويتا في الزوايا الجسمية المتناظرة
 وتشابهت فيهما الوجوه المتناظرة

(شكل ٢٠٢) على ما صرح به في الحدود يكون في هرمي ه ر ح د و ط ه د ه
 مثلثا ه ر ا و ا ر ح د من احدهما متشابهين لثنتي ط ه د ه و د ه د ه من الآخر
 وتشابه الوضع اعني ان زاوية ا ر ح د = د ه د و زاوية ر ح د = د ه د
 وزاوية ا ر ح د = د ه د وزاوية ر ا ح د = د ه د وماعدا هذا اذا كان
 الميل والانحراف بين مستويي ه ر ا و ا ر ح د مساويا للانحراف بين مستويي
 ط ه د ه و د ه د فالهرمان المرقومان يتشابهان فاذا علمت ما ذكرنا تشابهيهما
 كافة الوجوه المتناظرة وتساوي فيهما الزوايا الجسمية المتناظرة * فاذا أخذ
 د = د ه د و ر ح د = د ه د و ر ح د = د ه د و وصل د ح و د ح و د ح و
 فهرم ط ه د ه الحادث يساوي هرم د ر ح د لان ضلعي د ر و د ح
 اخذنا مساويين اضلعي د ه و د ه وفرضت زاوية د ر ح مساوية لزاوية
 د ه د فتساوي مثلثا د ر ح و د ه د

فلاجل اثبات المساواة بين هذين الهرمين اولاً نوضح قاعدة د ه د على
 قاعدة د ر ح المساوية لها بالاجراء لعمل التطبيق ولتساوي انحراف مستويي

سطه و د هو للمبين مستوي سـ ا و ا ر تين وقوع مستوي د هـ ط
 على مستوي ا سـ هـ ولكن حيث فرضت زاوية د هـ ط مساوية لزاوية
 د ر سـ يقع خط هـ ط على مساوية سـ هـ فلذا تنطبق نقط د هـ و د و ط
 الاربع بنقط د و سـ و ح و سـ اتحادا وبذلك تظهر انطبق هـ ر ي
 سطه و سـ د ر ح ولكن لتساوي مثلتي د هو و د ر ح تكون زاوية
 د ر ح = د هـ و = ا ر ح وبذلك خط ر ح يوازي خط ا د وخط د سـ خط
 ا سـ هـ فينتهـ مستوي سـ د ر ح يوازي مستوي سـ ا د (١٣ مقالة) ومن ثمة
 تين تشابه مثلث سـ د ح أو مساوية ط د و بمثلث سـ ا د و مثلث سـ ر ح
 أو مساوية ط هـ و بمثلث سـ د ر ح فلذا انفتح تشابه الوجوه الاربعة المتناظرة
 من هـ ر ي سـ ا د و ط د هـ و المثلثين وايضا الزوايا المجسمة المتناظرة
 منهما مساوية لانه قد تقدم تطبيق زاوية هـ المجسمة على نظيرتها سـ
 وكذلك تجرى البواقي مجراهما ولا جرم ان ترى زاويتي ط و سـ المجسمتين
 متساويتين حيث تركبتا من ثلاث الزوايا المسطحة المتساوية المتناظرة مع تشابه
 الوضع ومن اجل ذلك ثبت المطلوب من ان تكون الوجوه المتناظرة من الهرمين
 المثلثين المتشابهين متشابهة والزوايا المجسمة المتناظرة متساوية كما لا يخفى
 (نتيجة ١) يصدر هذا التناسب من المثلثات المتشابهة في ذينك الهرمين يعني
 ا سـ : د هـ :: ر ح : هـ و :: ا د : د و :: ا سـ : د ط ::
 سـ ر : ط هـ :: سـ د : ط و فلذا علم وجود تناسب اضلاع الاهرام
 المثلثية المتشابهة

(نتيجة ٢) لتساوي الزوايا المجسمة المتناظرة فكل ميسل بين وجهي احد
 التشابهين يساوي ما بين نظيريهما في الآخر

(نتيجة ٣) اذا قطع الهرم المثلثي بمستوي د ر ح موازيا لاعد وجوهه
 سـ ا د فهرم سـ د ر ح الجزئي يشابه هرم سـ ا د الكلي وذلك لتشابه
 مثلثي د ر ح و د ر ح لثلاثي سـ ا د و سـ ا د تناظرا و وضعاء متشابهة
 ولتساوي الحرف مستويي احدهما هو تطير له في الآخر ثبت التشابه بين

الهرمين المرقومين

(نتيجة ٢١٤) وهو ما كل هرم نحو $\text{سم} - \text{سم} - \text{سم}$ إذا قطع بمستوى
 ودح ط سم موازياً لقاعدته فهرم $\text{سم} - \text{سم} - \text{سم}$ ودح ط سم الجزئي من قبل الرأس
 مشابه لهرم $\text{سم} - \text{سم} - \text{سم}$ الكامل وذلك لتشابه قاعدة $\text{سم} - \text{سم} - \text{سم}$ ودح ط سم
 وإذا وصل قطراً سم ودح فاقول قد ثبت أنهما تشابه هرم $\text{سم} - \text{سم} - \text{سم}$ لهرم
 $\text{سم} - \text{سم} - \text{سم}$ فتبين أيضاً نقطة سم تقترأ إلى قاعدة ودح كما تبين بالتسوية إلى
 قاعدة $\text{سم} - \text{سم}$ (حد ١٨) فتبين تشابه هرمي $\text{سم} - \text{سم} - \text{سم}$ و $\text{سم} - \text{سم} - \text{سم}$
 بمصريحه في هذه النتيجة وما قبلها

تبيسه على ما ذكر من الحدود والتعريفات لا بد لوجود التشابه بين الهرمين
 من معرفة خمسة أشياء معينة ولكن استبدال تلك الأشياء بخمسة أخرى إذا تبين
 يثبت التشابه بين الهرمين كما ثبت عند وجود الخمسة الأولى ويان تلك الأخرى
 وإن كان مخصصاً في دعوى متعددة ولكن أميزها ما استذكر بعد هذه والمعنى
 أن الهرمين المتشابهين متى تناسبت أضلاعهما المتناظرة ثبت التشابه بينهما
 (شكل ٢٠٣)

لأنه إذا كانت $\text{سم} - \text{سم} - \text{سم}$: $\text{سم} - \text{سم} - \text{سم}$: $\text{سم} - \text{سم} - \text{سم}$: $\text{سم} - \text{سم} - \text{سم}$: $\text{سم} - \text{سم} - \text{سم}$
 : $\text{سم} - \text{سم} - \text{سم}$: $\text{سم} - \text{سم} - \text{سم}$: $\text{سم} - \text{سم} - \text{سم}$: $\text{سم} - \text{سم} - \text{سم}$: $\text{سم} - \text{سم} - \text{سم}$
 الشروط الخمسة التي تؤخذ لاثبات كفي الحدود من شروط التشابه لأن من ذلك
 توجد مشابهة مثلثي $\text{سم} - \text{سم} - \text{سم}$ و $\text{سم} - \text{سم} - \text{سم}$ لثلاثي $\text{سم} - \text{سم} - \text{سم}$ و $\text{سم} - \text{سم} - \text{سم}$
 لثلاثي $\text{سم} - \text{سم} - \text{سم}$ فلذا صارت السطوح المستوية التي تحيط بزواوية $\text{سم} - \text{سم} - \text{سم}$
 تساوي المستوية المحيطة بزواوية $\text{سم} - \text{سم} - \text{سم}$ المحيطة الأخرى تناظرًا ووضعاً متشابهاً
 فوجب تساوي الانحراف بين مستويي $\text{سم} - \text{سم} - \text{سم}$ و $\text{سم} - \text{سم} - \text{سم}$ لانحراف مستويي
 ط $\text{سم} - \text{سم} - \text{سم}$ و $\text{سم} - \text{سم} - \text{سم}$ فثبت تشابه الهرمين وآل الأمر إلى ما نتج من
 الشروط الأولى فإملى

(الدعوى الرابعة والعشرون النظرية)

كثيراً السطوح المتشابهة أن ما تشابهت وجوهها المتناظرة وقاسمت زواياها

البحر

(شكل ٢١٩) فإذا كان شكل ا ح و ه قاعدة كثير السطوح وتعين رؤس
 الزاويتين المجعقتين م و د الخارجيتين من تلك القاعدة بهري م ا ح
 و د ا ح ا مشتركتين في قاعدة ا ح د وكانت قاعدة ا ح و ه من كثير
 السطوح الاخر شبيهة بقاعدة ا ح و ه وتعين م و د نظيرتا م و د
 بهري م ا ح و د ا ح ا نظيري م ا ح و د ا ح ا فيتناسب بعدا
 م د و م د لاضلي ا ح و ا ح على التناظر لان الانحراف بين مستوي م ا د
 و س ا د يساوي الانحراف بين مستوي م ا ح و س ا ح بتشابه هري
 م ا ح و م ا ح و ايضا الوجود المشابهة بين هري د ا ح و د ا ح
 يكون انحراف مستوي د ا ح و س ا د مساويا لانحراف مستوي د ا ح
 و س ا ح فان حذف ميل الاول من ميل الاخر يبق الانحراف مستوي د ا ح
 و م ا د مساويا لانحراف مستوي د ا ح و م ا ح لوقوع التشابه بين ذلك
 الهرمين فمثل د ا م يشابه مثل م ا ح و حيث يشابه مثل د ا ح فمثل
 د ا ح وقع التشابه بين الوجهين المتناظرين من هري م ا ح و م ا ح
 المثلثين وتشابه الوضع ونساوي الانحراف فيهما فلذا ظهر تشابه الهرمين
 المرقومين (٢١) واضلاعهما المتناظرة تعطى هذا التناهي حيث ان م د :
 م ح :: ا م : ا م وكذا ا م : ا م :: ا ح : ا ح ونساوي التسب
 كانت م د : م ح :: ا ح : ا ح

واما اذا كانت ف و ف رأسين آخرين متناظرين من كثير السطوح
 المرقومين فتكون ايضا ف د : ف ح :: ا ح : ا ح وكذا ف م :
 ف م :: ا ح : ا ح وحيث تكون م د : م ح :: ف د : ف ح
 :: ف م : ف م فلذا علم ان كل مثل يحدث بوسائل ثلاث رؤس من احد
 كثير السطوح فهو ف د م يشابه مثل ف ح م المشكل من وسائل

الثلاث الرؤس الاخرى المناظرة للاول من الاخر

واذا كانت $\angle ك$ و $\angle ك$ رأسين متناظرين فيكون ايضا مثلث $\angle ك$ و
 مشابه للمثلث $\angle ك$ و $\angle ك$ فضلا عن ان يكون انحراف مستوي $\angle ك$ و
 و $\angle ك$ مساويا لانحراف $\angle ك$ و $\angle ك$ و $\angle ك$ الاخرى لانه اذا وصل
 $\angle ك$ و $\angle ك$ فوجد المشابهة بين مثلثي $\angle ك$ و $\angle ك$ و $\angle ك$ فلذا زاوية
 $\angle ك$ مساوية لزاوية $\angle ك$ فاذا انصورت تشكيل زاوية مجمعة في نقطة \angle
 من ثلاث زوايا مسطحة $\angle ك$ و $\angle ك$ و $\angle ك$ وفي نقطة \angle زاوية
 مجمعة اخرى بثلاث زوايا مسطحة $\angle ك$ و $\angle ك$ و $\angle ك$ و حيث ان
 هذه المسطحة متساوية بالتناظر وجب تساوي المجمعتين المرقومتين فلذا
 انحراف مستوي $\angle ك$ و $\angle ك$ مساوي لانحراف مستوي $\angle ك$ و
 و $\angle ك$ وان كان مستويا $\angle ك$ و $\angle ك$ على مستوي واحد لم يتخذ
 تكون زاوية $\angle ك = \angle ك + \angle ك$ وايضا زاوية $\angle ك =$
 $\angle ك + \angle ك$ والمعنى ان مثلثي $\angle ك$ و $\angle ك$ يكونان
 على مستوي واحد فظهر مما امر الى هنا ان ما كانت عليه زوايا $\angle ك$ و $\angle ك$
 من حال ما فان نظائرهما $\angle ك$ و $\angle ك$ تكون مثلها وتجري مجراها
 في كل الوجوه

الآن اذا فرض انقسام سطح احد كثيري السطوح الى مثلثات $\angle ك$ و $\angle ك$
 و $\angle ك$ و $\angle ك$ الخ فلا جرم ان سطح الاخر يحتوي على مثلثات مساوية
 لتلك المثلثات عددا ومساوية لها نحو $\angle ك$ و $\angle ك$ و $\angle ك$ و $\angle ك$
 الخ واذا كانت مثلثات $\angle ك$ و $\angle ك$ الخ المتعددة في مستوي واحد
 فنظائرهما $\angle ك$ و $\angle ك$ الخ تكون كذلك

والحاصل ان كل وجه في كثير السطوح كان شكلا مستقيما الاضلاع ايما كان
 فنظيره في كثير السطوح يكون شكلا يشابهه ويقابله محضا فعمل من هذا ان كثيري

السطوح المتشابهة تحاط بسطوح مستوية متشابهة هيئة ووضعاً ومتساوية عدداً كما علم ولا يخفى فيه

وما عدا هذا فالزوايا الجسمية المتناظرة من كثيرى السطوح المرقومين تكون متساوية • لانه كما اذا تصور تشكيل زاوية هـ الجسمية بزوايا كـ هـ فـ و م و ن و كـ دـ هـ المسطحة تتشكل نظيرتها زـ الاخرى بزوايا كـ زـ و فـ زـ م و م و ن و كـ دـ هـ المسطحة المشابهة لتلك الزوايا ولوجود المساواة بين كل مستويين من انحراف في أحدهما للمباين نظيريهما في الآخر ثبت امكان التطابق كاملا بين كل مجسمتين متناظرتين وان كثيرى السطوح المتشابهين متساوي فيحـ ما الزوايا الجسمية المتناظرة وتشابه الوجوه المتناظرة هيئة ووضعاً وهو المطلوب

(نتيجة) على ما صرح به في الدعوى المقدمة انه كما يتشكل هرم مثلثي من اربع رؤس في كثير السطوح يتشكل من أربع رؤس نظائرهما في كثير السطوح المشابهة هرم مثلثي آخر يشبه ما تقدم لتناسب اضلاعهما المتناظرة

(نتيجة ٢١) وفي هذا يرى أن النسبة بين قطري اـ و اـ هـ المتناظرين كالنسبة بين ضلعي اـ و اـ على التناظر

• (الدعوى الخامسة والعشرون النظرية) •

كثير السطوح المتشابهان يمكن ان ينقسما الى اهرام متشابهة هيئة ووضعاً ومتساوية عدداً

لانه قد ثبت ان كثيرى السطوح يمكن انقسام سطوحهما الى مثلثات متناظرة متشابهة تشابهت أوضاعهما واذا فرض ان جميع المثلثات التي تحيط بكثير السطوح سوى ما حاط بزواوية اـ الجسمية كقواعد فتكون اهراما مثلثية مجمعة في نقطة اـ المرقومة بمثل ذلك القواعد لجملة هذه الاهرام عبارة عن جسم كثير السطوح فاذا انقسم الآخر الى اهرام مثلثية قد اجتمعت رؤوسها في نقطة أ نظيرة اـ في الاول فكل هرم تشكل بوصائل الرؤس الاربع من

احدهما يشابه الهرم الذي تصور بوصائل الرأس الاربع من كثير السطوح
الاسطح كما عرفت ومن ثمة قد ظهر اثبات امكان تقسيم كثيرى السطوح المتشابهين
الى اهرام مثلثية متناظرة متشابهة قد تشابه وضعها وهو الظاهر
(الدعوى السادسة والعشرون النظرية) •

النسبة بين الهرمين المتشابهين كالنسبة بين مكعبى ضلعهما المتناظرين لانه اذا
تشابه الهرمان يمكن وضع الاصغر منهما فى الاكبر

(شكل ٢١٤) بان تكون زاوية α من المجسم مشتركه فقاعدتا α و β و

و γ و δ من المرقومين متوازيان لتتشابه الوجوه المتناظرة منهما (٢٢)

فتكون زاوية α و β مساوية لزاوية γ و δ وايضا زاوية α و β زاوية γ و δ

من α بناء عليه مستوى γ و δ يوازي مستوى α و β (١٤ مقاله ٥) فاذا

كان الامر كما ذكر وكان خط γ و δ هو العمود النازل من رأس α و β على

مستوى α و β ونقطة γ و δ ملتقا العمود المرقوم بمستوى γ و δ فعلى

ما صرح به فى الدعوى الخامسة عشرة تكون α و β : γ و δ :: α و β :

γ و δ :: α و β : و فلذا كان $\frac{1}{\alpha} \times \gamma$: $\frac{1}{\beta} \times \delta$:: α و β :

و لتتشابه قاعدتي α و β و γ و δ و α و β كانت α و β :

γ و δ :: α و β : فاذا ضربت حدود هذين التناسين حدا بحد

يكون α و β و γ و δ $\times \frac{1}{\alpha} \times \gamma$: $\frac{1}{\beta} \times \delta$: و α و β : γ و δ :: α و β :

γ و δ : ومن كون مقدار α و β $\times \frac{1}{\alpha} \times \gamma$: $\frac{1}{\beta} \times \delta$: هو مساحة جسم هرم

من α و β و γ و δ ومقدار α و β $\times \frac{1}{\alpha} \times \gamma$: $\frac{1}{\beta} \times \delta$: هو مساحة جسم هرم

من α و β و γ و δ كانت النسبة بين الهرمين المتشابهين كالنسبة بين مكعبى ضلعهما

المتناظرين

(الدعوى السابعة والعشرون النظرية) •

النسبة بين كثيرى السطوح المتشابهين كالنسبة بين مكعبى ضلعهما المتناظرين

لانه يمكن انقسامهما الى اهرام مثلثية متشابهة (٢٣)

(شكل ٢١٩) نسبة هرمي أف د م و أف د م كسبة مكعبى ضلعى ا م
و ا م المتساظرين أو مكعبى ضلعى ا - و ا - وكذا فى كل هرمين فلذا
كانت نسبة جميع الاهرام التى يتركب منها كثير السطوح اود ذات كثير
السطوح الى كثير السطوح الاخر كسبة مكعب ضلع من الاول الى المكعب
تظهر من الثانى وثبت المطلوب

(تجربة ميموى)

بيان ما كان فى هذه المقالة من الدعاوى المتعلقة بالمساحة الجسمية من كثيرى
السطوح بطريق الجبر على سبيل الاجال فى هذا المجل

مثلا اذا كانت - قاعدة منشور و ع ارتفاعه فمساحة جسمه - \times ع
أو - ع وكذا اذا كانت - قاعدة هرم و ع ارتفاعه فمساحة جسمه
- $\times \frac{1}{3}$ ع أو ع $\times \frac{1}{3}$ - أو $\frac{1}{3}$ - ع وايضا اذا كانت ع
ارتفاع هرم ناقص متوازى القاعدتين وكانت ا - قاعدة فيه وحيث
ان γ - هو الوسط المناسب بينهما فمساحة جسمه $\frac{1}{3}$ ع \times (ا +
- + γ)

واذا كانت - قاعدة منشور مقطوع و ع و ع و ع ارتفاعات ثلاث
رؤسه العليا فمساحة جسمه $\frac{1}{6}$ - \times (ع + ع + ع)

والنهاية اذا كانت ه - و ه مساحتي كثيرى السطوح المتشابهين و س -
ضلعيهما أو قطرهما المتساظرين فتكون نسبة ه : ه :: س : س فت
المقالة السادسة بحسن توفيقه تعالى

(المقالة السابعة)
 في بيان الكرات والمثلثات الكروية
 المردود

حد ١ الكرة جسم محدود بأساطة سطح مخن تكون جميع نقطه على ابعاد متساوية من نقطة داخله وتلك النقطة تسمى مركزا

(شكل ٢٢٠) يمكن ان يمتد وجود جسم الكرة بدوران نصف دائرة واه على قطر و ه لان كافة نقط السطح المخن الحادث بحركة مخنفي واه تكون على ابعاد متساوية من مركز ه

(٢) نصف قطر الكرة هو الخط المستقيم الواصل بين مركزها وبين نقطة من سطحها وقطرها ومحورها هو الخط المستقيم المار من مركزها ومنتهى الطرفين الى سطحها وانصاف اقطار الكرة كلها متساوية وجميع اقطارها ايضا متساوية حيث كانت اضعا فالانصاف اقطارها

(٣) على ماسياتي في الدعوى الاولى من الاثبات ان المثلثات الحادثة من المستويات تكون دوائر فاذا علمت ما ذكرنا فالدوائر التي تمر من المركز تسمى دوائر عظيمة والتي لم تمر منه تسمى دوائر صغرى

٤ المستوى الذي لا يشترك مع الكرة الا في نقطة واحدة نقط يسمى مماسا بالكرة

٥ قطب دائرة الكرة نقطة من سطح الكرة تكون الابعاد التي بينها وبين جميع نقط محيط تلك الدائرة كلها متساوية فعلى ماسياتي في الدعوى السادسة ان الدائرة لها قطبان صغيرة كانت او كبيرة

٦ المثلث الكروي جزء من سطح الكرة احيط بثلاثة اقواس دوائر عظام وسميت تلك الاقواس اضلاع المثلث ولا زال كل واحد منها اصغر من نصف المحيط والزوايا الحادثة من تلاقي مستويها تكون زوايا ذلك المثلث

٧ المثلث الكروي يسمى قائم الزاوية ومساوي الساقين ومساوي الاضلاع كما صرح به في المثلثات المستوية

٨ ذوالاضلاع الكثيرة الكروي أو المضلع الكروي قسم من سطح الكرة محدود بأحاطة عدة اقواس دوائر نظام

٩ شقة الكرة قسم من سطح الكرة احيط بنصفين محيطين دائريين عظيمين محدودين بقطر مشترك

١٠ ضلع الكرة قسم من جسم الكرة احيط بنصفين الدائريين العظيمين والشقة فاعده

١١ الهرم الكروي قسم من جسم الكرة فاعده مضلع كروي ورأسه زاوية مجمعة بالمركز احيط بسطوح مستوية انتهت الى تلك القاعدة وتلاصقت بها

١٢ المنطقة قسم من سطح الكرة محصور بين المستويين المتوازيين بان يكونا لها قاعدتين • وان كان احدهما مماسا بالكرة فليس لها حينئذ الاقاعدة واحدة فقط

١٣ قطعة الكرة قسم من جسم الكرة محصور بين المستويين المتوازيين وهما لها قاعدتان • وان كان احدهما مماسا بالكرة فليس لها حينئذ الاقاعدة واحدة فقط

١٤ ارتفاع المنطقة أو القطعة هو البعد الحقيقي بين قاعدتيها

١٥ (شكل ٢٢٠) كما يحصل جسم الكرة من ادارة نصف دائرة Γ اه على قطر Γ فاجسم الحاصل من دوران قطاع Γ هو Γ أو Γ يسمى قطاع الكرة

• (الدهوى الاولى النظرية) •

مقاطع الكرة الحادثة بمستوكاها دوائر

مثلا (شكل ٢٢١) اذا كان مقطع Γ محدثا بمستوى الكرة التي مركزها Γ وانزل عمود Γ من نقطة Γ على مستوى Γ ووصلت بخطوط

د م و ح المختلفة الى النقط المختلفة من منحني ا م - ادى حدد المقطع وحيث ان خطوط د م و ح و د - الموائل هي انصاف اقطار الكرة تكون مقدسوية وحيث انها موائل افترقت وهي متساوية الابعاد عن عمود ح ع (مقالة ٥) ومن اجل ذلك كانت الخطوط المستقيمة وبالجملة ع م و ع م و ع - متساوية ومقطع ا م - دائرة تقطع ع مركزها

(نتيجة ١) وان كان المقطع يمر بمركز الكرة فنصف قطره هو نصف قطر الكرة فلذا كانت الدوائر العظام من الكرة كلها متساوية (نتيجة ٢) الدائرتان العظيمتان ينصف بعضهما بعضا دائما حيث كان نصاهما المشترك قطرا يمر بالمركز

(نتيجة ٣) جميع الدوائر العظام تقسم الكرة وسطحها بمساوين * لانه من بعد انفصال نصفي الكرة اذا جعل محدهما في جهة واحدة وانطبق احدهما على الاخر مع اشتراك القاعدة من سطح الكرة اتحد السطحان وانطبقا وان لم ينطبقا لزم ان توجد نقط متباعدات واخر متقاربات من مركز الكرة وهذا بخلاف تعريفها

(نتيجة ٤) (شكل ٢٢١) مركز الدوائر الصغرى ومركز الكرة يكون على الخط المستقيم العمود على مستوى الدائرة الصغيرة

(نتيجة ٥) (شكل ٢٢١) الدوائر الصغرى أصغر ما بعد من المركز * لان بعد ح ع كلما كبر مغزوت ا - الذى هو قطر الدائرة ا م - الصغيرة

(نتيجة ٦) يمكن مروردائرة عظيمة واحدة من نقطتين معينتين على سطح الكرة * لان هاتين النقطتين ومركز الكرة هي ثلاث نقط تعين المستوى هذا ان لم تكن تلك النقط على مستقيم واحد * واما اذا كانت النقطتان المقيمتين على نهايتي القطر فهما والمركز على مستقيم واحد واذا يجوز ان تمر من هاتين النقطتين دوائر عظام كثيرة لا تنحصر عددا

• (الدعوى الثانية النظرية) •

(شكل ٢٢٢) كل مثلث كروى فهو ا - ح اى ضلع منه اصغر من مجموع الاثنین

الاخرين

فاذا كان ع مركز الكرة ووصلت انصاف اقطار ع ا و ع ح و ع -
وتصور ان مستويات ا ع - و ا ع ح و ع ح - شكلت زاوية بمجموعة في نقطة
ع المرقومة وحيث ان اقواس ا - و ا ح و ح - التي هي اضلاع مثلث
ا ح - الكروي مقادير لزوايا ا ع - و ا ع ح و ح ع - ولاجرم ان الثلاث
زوايا المحيطية بالزاوية المجموعة كل واحدة منها اصغر من مجموع الاثنين الاخرين
(٢١ مقالة) فثبت المطلوب من ان يكون كل واحد من اضلاع ا ح - المثلث
الكروي اصغر من مجموع الاثنين الاخرين

• (الدعوى الثالثة النظرية) •

قوس الدائرة العظيمة الواصلة بين نقطتين معينتين على سطح الكرة هو اقرب بمد
بين تلك النقطتين

(شكل ٢٩٣) مثلا اذا كان خط ا ح - الواصلة بين نقطتي ا و - قوس دائرة
عظيمة • فان قيل يمكن أن نقطة م الخارجة عن القوس المذكور هي نقطة
الخط الاصغر الواصلة بين نقطتي ا و - اقول يرسم م ا و م - قوسى دائرة
عظيمة من نقطة م وبؤخذ ح - = م فعلى ما ذكر في الدعوى التي تقدمت
قوس ا ح - يكون اصغر من مجموع قوسى ا م + م - فاذا حذف
ح - و م المتساويين يبقى ا ح > ا م فالبعد من نقطة - الى نقطة م سواء
اخذ بقوس م أو كان خطا آخر هو مساو للبعد من نقطة - الى نقطة ح
• لانه اذا قور مستوى دائرة م العظيمة حول القطر المار بنقطة - تأتى
نقطة م على نقطة ح فلذا يتجدد الخط الاصغر من نقطة م الى نقطة - بالخط
الذى هو م ح الى -

فاحد الطريقين اعنى البعد بين نقطتي ا و - يمر من نقطة م والاخر من
نقطة ح وتساوى ما كان بين نقطتي م و - بما كان بين نقطتي ح و - من
الطريقين وقد زعم ان المار من نقطة م هو الاصغر فزعم ان يكون البعد من
نقطة ا الى نقطة م اصغر من البعد من نقطة ا الى نقطة ح وهو محال

• حيث ثبت أننا ان قوس $ام$ اكبر من قوس $اك$ فمرادنا علم ان الخط
الاصفرين نقطتي $ا$ و $ب$ ليسا نقطة خارجة عن $اك$ قوس الدائرة
العظيمة وهو الاصفرينهما وثبت المطلوب

• (الدعوى الرابعة النظرية) •

مجموع ثلاثة اضلاع المثلث الكروي اصغر من محيط دائرة عظيمة
(شكل ٢٢٤) مثلا اذا كان $ا$ $ب$ مثلثا كرويا امتد ضلعا $ا$ $ب$ و $ا$ $ج$
حتى يلتقيان في نقطة $د$ فقوسا $ا$ $د$ و $ا$ $ج$ يكونان ضمن محيط • لان
الدائرتين العظيمتين يقسم بعضهما بعضا على التساوي (الاولى) ولا جرم ان ضلع
 $ا$ $ب$ $>$ $ا$ $د$ + $ا$ $ج$ في مثلث $ا$ $د$ $ج$ (٢) فاذا زيد $ا$ $ب$ + $ا$ $ج$
على كل من هذين لغير التساويين يكون $ا$ $ب$ + $ا$ $ج$ + $ا$ $د$ $>$ $ا$ $د$ +
+ $ا$ $ج$ اعني ان مجموع ثلاثة اضلاع المثلث اصغر من المحيط وثبت
المطلوب

• (الدعوى الخامسة النظرية) •

كل مضلع كروي مجموع اضلاعه اصغر من محيط دائرة عظيمة
(شكل ٢٢٥) مثلا اذا كان $ا$ $ب$ $ج$ $د$ $هـ$ مضلعا خمسا امتد ضلعا $ا$ $ب$ و $ا$ $ج$
حتى التقيا في نقطة $و$ وحيث ان قوس $ا$ $د$ اصغر من مجموع قوسي $ا$ $و$
+ $و$ $د$ صار محيط خمس $ا$ $ب$ $ج$ $د$ $هـ$ اصغر من محيط $ا$ $هـ$ $و$ $د$ ذي الاربعة
الاضلاع • وايضا اذا امتد ضلعا $ا$ $هـ$ و $ا$ $ج$ حتى يلتقيان في نقطة $ز$ يكون
 $ا$ $هـ$ $>$ $ا$ $ز$ + $ز$ $هـ$ فلذا صار محيط $ا$ $هـ$ $و$ $د$ $ز$ $هـ$ $ا$ $ب$ $ج$ $د$ $هـ$ اصغر من محيط
مثلث $ا$ $و$ $ز$ واقدصرح في الدعوى السابقة ان مجموع الاضلاع الثلاثة من
المثلث الكروي اصغر من محيط دائرة عظيمة فثبت المطلوب من ان يكون محيط
المضلع الكروي $ا$ $ب$ $ج$ $د$ $هـ$ اصغر من محيط دائرة عظيمة وهذا آكد
دليل

تبييه اصل بناء هذه الدعوى عين ما في الدعوى الثانية والعشرين من المقالة
الخامسة لانه اذا كانت $ع$ مركزا وسمت بمجموعة $ز$ و $ا$ $ب$ $ج$ $د$ $هـ$

و ج ح د الخ المستطعة فبمجموعها اصغر من اربع قوائم فلا فرق بين هذه وبين ما في المقالة الخامسة في أصل البناء وان اختلف التعبير وطريق الاثبات لكن حيث ان الاضلاع في كل منها محدبة لو امتدأ أحدها فلا يقطع شكله أبدا
 * (الدعوى السادسة النظرية) *

(شكل ٢٠٠) اذا رسم قطر د ه عمودا على ا م - مستوى الدائرة العظيمة فنهايتاه د ه تكونان قطعين لدائرة ا م - وماوازاها من الدوائر الصغار نحو و د د

اولا حيث ان خط د ه عمود على مستوى ا م - فهو عمود على جميع الخطوط التي تمر من موقعه بنحو د ا و ج م و د - الخ واقواس د ا و د - الخ تصير ارباع محيط وكذا اقواس ه ا و ه م و ه - الخ تعلم ان كل واحدة من نقطتي ه و د اقترقتان كل من كافة نقاط محيط ا م - متساوية الابعاد فكلتا نقطتي ه و د هما نقطتا المحيط

ثانيا حيث ان نصف قطر د ه عمود على مستوى ا م - فهو عمود على مستوى دائرة و د د الموازية لها ويمر بذلك العمود من ع مركزها (١) فاذا رسمت خطوط د و د و د و د

المواثل فهي متساوية لاقتراحها عن عمود د ع متساوية الابعاد وتتساوى اقواس د د و د و د و د الخ لتساوى اوتارها فلذا ثبت ان نقطة د هي قطب لدائرة و د د وبذلك ثبت ان نقطة ه قطبها الآخر

(نتيجة ١) حيث ان كل قوس واصل من نقطة من قوس دائرة ا م - العظيمة الى قطبها ه و ربع محيط يسمى ربعا فقط اختصارا فهذا الربع محدث زاوية قائمة بقوس ا م - لان خط د ه عمود على مستوى ا م - فكل مستوى يمر بذلك العمود فنحو د م يكون عمودا على المستوى المرقوم (١٨ مقالة) فعلى ما صرح به في الحد السادس فالزاوية الحادثة بتلك المستويات فنحو ا م - تكون قائمة

(نتيجة ٢) لاجل وجود قطب قوس ا م المعين برسم من نقطه م قوس د ه

من غير تحديد عمود على أم ويؤخذ م مساوي الربع فنقطة د هي احد قطبي قوس أم • أو يرسم من نقطتي أ و م قوسا د و م د غير محدودين همودين على قوس أم فنقطة د ملتقاهما هي القطب المطلوب (نتيجة ٣) وبالعكس اذا كان كل من البعدين من نقطة د الى نقطتي أ و م مساويالربع فنقطة د هي قطب قوس أم وحينئذ كل من زاويتي دأم و أم د تكون قائمة • لانه اذا كانت نقطة د مركز الكرة ورسمت انصاف اقطار دأ و د و د م فزاويتا دأ و د م د قائمتان فخط د م يكون عمودا على مستقيمي دأ و د م فهو عمود على مستويهما فلذا صارت نقطة د قطبا لقوس أم فضلا عن قيام زاويتي دأم و أم د (تنبیه) لوجود تلك الخواص في الاقطاب سهل ترسيم الاقواس واجراء عملها فوق سطح الكرة كما رسمت فوق المستوى

مثلا اذا دور قوس د و أ وكل خط قدره انقراجا حول نقطة د ترسم نقطة و نهايته دائرة و د د الصغيرة واذا دور ربع د و أ حول نقطة د فيرسم نهاية اقوس أم من دائرة عظيمة وان اريد م قوس أم أو كان لا يعلم من عمره الانقضا أ و م فقط أو لا يتعين قطب د بالفصل المشترك بين القوسين المتشئين بانقراج واحد المساوي كل منهما لربع بان تجعل نقطتا أ و م مركزين • ثانيا حيث تعين قطب د فيجعل مركزا وبالانقراج المرقوم يرسم قوس أم وبه يتعين محزجه وبالجمله اذا اريد انزال قوس همود على قوس أم المعلوم من نقطة ف العينة تمتد قوس أم حتى ينفى الى نقطة م بأن يكون انقراج ف م قدر ربع المحيط فاذا رسم قوس ف م من قطب م بمقدار الربع الرقيم فهذا القوس هو العمود المطلوب

• (الدعوى السابعة النظرية) •

كافة المستويات العماد على نهاية نصف القطر تمام بالكرة

(شكل ٢٢٦) - مثلا اذا كان مستوى وار عمودا على نهاية نصف قطر ع أ

وأخذت نقطة م على ذلك المستوى ووصل عا و ما فبعد عم اكبر
من بعد عا وذلك لقيام زاوية عام فلذا تقع نقطة م خارج الكرة
وكذا كل نقطة من مستوى دار وحيث لم يكن له والكرة نقطة مشتركة
الانقطة ا فقط ثبت المطلوب من ان يكون مماسا للكرة (حد ٤)

(تبينه) وكذلك ثبت مماس الكرتين اذا لم يكن لهما الانقطة مشتركة واحدة
فقط حيث كان البعدين المركزين مساويا لمجموع أول تفاضل نصف قطري
الكرتين فالمرکز ان نقطة الخامس تصبح حينئذ على مستقيم واحد

• (الدعوى الثامنة النظرية) •

(شكل ٢٢٦) زاوية ساد الحادثة بين اس و ا ح قوسى الدائرتين العظمتين
مساوية لزاوية دار المشكلة في نقطة ا من مماسى القوسين المرقومين
ويكون قوس ده المرسوم بين ضلعي اس و ا ح الخارجين حسب الاقتضاء
بأن تكون نقطة ا قطبا له معيارا لتلك الزاوية

لان مماس ا د المرسوم في مستوى قوس اس عمود على نصف قطر ا ع
وكذلك مماس ا د المرسوم في مستوى قوس ا ح يكون عمودا على ا ع
المرقوم فلذا زاوية دار تكون مساوية للزاوية الحادثة بين مستويي ع ا -
و ع ا د (١٧ مقالة) اعنى ما بين قوسى اس و ا د وميت ساد وكذلك
اذا كان قوسا ا د و ا ه ربعين فزاوية د ع ه تساوى ما بين مستويي ا ع د
و ا ع ه حيث ان خطي ع د و ع ه عمودان على خط ع ا فلذا كان قوس
ده معيارا لما بين المستويين اعنى زاوية د ا -

نتيجة تقدر الزوايا من المثلثات الكروية بتقدير أقواس الدوائر العظام المحصورة
بين أضلاعها بأن تكون رؤس زواياها أقطابا وكذلك سهلت طريقة رسم
زاوية مساوية لزاوية معلومة

تبينه (شكل ٢٢٨) الزاويتان المتقابلتان رأسا نحو ا د ع و س د متساويتان
• لان كلامنا لازالت تتشكل بين مستويي ا د - و ع د • ولا يخفى ان
مجموع كل متجاورتين حادثتين من تلاقى قوسى ا د - و ع د مساو

لثلاثين فهو زاويتي ا د ع و ح -

• (الدعوى التاسعة النظرية) •

(شكل ٢٢٧) اذا كان مثلث ا - د - هـ معلوما ورسم مثلث د هـ و مشكلا باقواس هـ و و د و د هـ بأن تكون نقطة ا و - و - اقطبا بنقطة د هـ و و تكون اقطبا ايضا لاقواس - د و ا د و ا - اضلاعه لان نقطة ا قطب لاقوس هـ و فبعد ا هـ يكون ربعا وكذا بعد هـ د حيث كانت نقطة د قطبا لاقوس د هـ فلذا نقطة هـ تكون قطبا لاقوس ا د حيث كان بعدها من كل من نقطتي ا و د مساويا لربع (٦ تنبئة ٢) وبذلك ثبت ان نقطة د قطب قوس - د ونقطة و قطب قوس ا - د
(نتيجة) كما رسم مثلث د هـ بواسطة مثلث ا - د - هـ فمثلث ا - د - هـ ايضا يرسم بواسطة

• (الدعوى العاشرة النظرية) •

(شكل ٢٢٧) اذا وضعت الاشياء التي كانت فيما تقدمت عنها مقدمة لكل زاوية من احد مثلثي ا - د - هـ و د هـ و تساوى التقاضيل بين نصف المحيط والضلوع المقابل لهما من المثلث الآخر

فيمتد ضلعا ا - د و ا د حسب الاقتضاء حتى يلاقي الخط هـ و في نقطتي د و ح ومن كون نقطة ا قطبا لاقوس د ح فهو معيارها ولكن حيث ان قوس هـ ح ربع وكذا قوس د و نقطة هـ هي قطب قوس ا ح ونقطة د هي قطب قوس ا د فلذا صار مجموع هـ ح + د و قدر نصف المحيط وهو عين مجموع هـ و + د ح فاقوس د ح معيار زاوية ا يساوي نصف المحيط مطروحا منه قدر ضلع هـ و وكذا مقدار زاوية - د يساوي نصف المحيط - د و معيار زاوية د هـ نصف المحيط - د هـ

ويقع التماكب في هذه الخاصة بين المثلثين لان كل واحد منهما مرسوم بواسطة الآخر فلذا وجدت مقادير د هـ و و زاويا مثلث د هـ وهي $\frac{1}{2}$ محيط - د هـ و $\frac{1}{2}$ محيط - ا د و $\frac{1}{2}$ محيط - ا - د •

فاقول مثلا اذا كان قوس γ معيار الزاوية γ فيصير $\gamma + \gamma = 2\gamma$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ المحيط فلذا قوس $\gamma = \frac{1}{2}$ المحيط - γ وكذا باقي الزوايا ومن ثمة قام البرهان على ما اريد اثباته
 تنبيه (شكل ٢٢٨) واما الثلاثة الاخر المكن تشكيهاها بصول اقواس γ و γ و γ و γ الثلاثة فلا بد لها من علامة فارقة تميزها عن مثلث γ وهو فلا ملجأ في هذه الدعوى الا الى تسمية المثلث مركزيا وتييز مثلث γ من الثلاثة الاخر بان تكون زاويتاه α و β في جهة واحدة من طرفي ضلع γ (شكل ٢٢٧) و γ و γ في جهة ضلع α و γ و γ في احدى جهتي ضلع α فصار يميز بذلك عن المثلثات الثلاث الاخر واسمى في هذا الباب تسمية مثلثي α و γ وهو كل واحد مثلثا قطبيا وان سماها بعض اقوام باءاء مختلفة

• (الدعوى الحادية عشرة الفائدة) •

• (شكل ٢٢٩) اذا كان مثلث α معلوما ورسم γ قوس دائرة صغيرة بقدر انقراج α من قطب α وقوس γ من قطب γ بانفتاح γ ووصل قوسا الدائرة العظيمة α و γ من نقطة γ تقاطع قوسي γ و γ فاقسام مثلث α الحادث تساوى اقسام مثلث α لان ضلع $\alpha = \alpha$ بالعمل وضلع $\gamma = \gamma$ ولاشتراك α كانت الاضلاع الثلاثة المتناظرة في المثلثين متساوية فالزوايا المقابلة لتلك الاضلاع تكون متساوية فاذا فرض مركز الكروية γ وتصور تشكيل زاوية مجسمة في نقطة γ بزوايا α و α و γ و γ المسطحة وكذلك الاخرى بزوايا α و α و γ و γ وحيث ثبت التساوى بين الاضلاع المتناظرة من مثلثي α و α فظهر ان الزوايا المسطحة التي تحيط باحدى الجسمين مساوية ومناظرة للزوايا التي تحيط بالآخرى ويمكن في الدعوى (٢٣ مقالة) ثبت التساوى بين كل انحراف حادث بين المستوية المتناظرة من احدهما والآخرى فصارت زوايا مثلث α الكروي مساوية للزوايا مثلث

حـ ا- الآخر اعني ا- = س ا ح و س ا = ا ح و ا د = ا ح و
 فتبين تساوى الاضلاع والزوايا المتناظرة في مثلثي ا د س و ا ح د
 تنبيه ما كان في هذين المثلثين من المساواة ليس مطلقاً أي ليس على طريق التطبيق
 لانهما ما لم يكونا متساويي الساقين لا يمكن تطبيق احدهما على الآخر وهذا
 من قبيل ما ذكرناه من تساوى المقائيل ومن اجل ذلك وجب تسمية مثلثي ا ح د
 و ا د س مقائيلين

(الدعوى الثانية عشرة النظرية)

في كرة واحدة وفي كرات متساوية يساوى المثلثان الكرويان وتساوى
 اقسامهما اذا تساوى منهن مائتي الاضلاع وآحاد الزوايا التي بينهما
 (شكل ٢٣٠) مثلاً اذا كان ضلع ا- = هـ و و ا ح = هـ د وزاوية
 س ا ح = و هـ د ينطبق مثلث هـ و د على مثلث ا- ح د او على بمائله
 ا د س الآخر كما وقع بين المثلثين المستقيمي الاضلاع اذا تساوى منهن الضلعان
 والزاوية التي بينهما والمساواة اقسام مثلث هـ د د لاقسام مثلث ا- ح د تساوى
 الاقسام الباقية منهنما وبصير ضلع س ح = و د وزاوية ا- ح د = هـ و د
 وزاوية ا ح د = هـ و د

(الدعوى الثالثة عشرة النظرية)

يتساوى المثلثان الكرويان الموضوعان على كرة واحدة او كرات متساوية
 وتساوى جميع اقسامهما اذا تساوى منهنما آحاد الاضلاع ومجاوراهما من مائتي
 الزوايا

لانه يمكن تطبيق احدهما على الآخر كما قبل بمستقيمي الاضلاع فلا حاجة الى
 بسط برهان بل حسبك ما صرح به في الدعوى (٧) من المقالة الاولى

(الدعوى الرابعة عشرة النظرية)

يتساوى المثلثان الموضوعان على كرة واحدة او كرات متساوية اذا تساوى
 اضلاعهما المتناظرة الثلاثة * اي تساوى منهنما ايضا الزوايا المتناظرة المورثة
 بتلك الاضلاع

(شكل ٢٢٩) وهذه القضية واضحة مما صرح به في الدعوى (١١) اذ لا يمكن فيها الارسم مثلثين اثنين $ا ب د$ و $ا ب د$ بثلاثة اضلاع معلومة نحو $ا ب$ و $ا د$ و $ب د$ هذا و وقوع الخلاف في جهة وضع الاقسام وان كان ممكنا لكن لا يخالف في صحة تساويهما اقدرا ومن ثمة ثبت تساوي المثلثين وتساوي اقسامهما على التناظر

وذلك التساوي اما ان يكون مطلقا او متائليا والمعنى متى تساوت اضلاعهما الثلاثة تتساوى الزوايا المتناظرة المقابلة لتلك الاضلاع
 * (الدعوى الخامسة عشر النظرية) *

كافة المثلثات الكروية المتساوية الساقين متماثل زواياها المقابلة للاضلاع المتساوية متساوية

وبالعكس المثلث الكروي اذا تساوت زاويتاه فهو متساوي الساقين (شكل ٢٣٢) او اذا كان $ا ب = ا د$ فزاوية $د =$ زاوية $ب$ لانه اذا انزل قوس $ا د$ من رأس $ا$ على $د$ وسط القاعدة فالمثلثان الحادان $ا ب د$ و $ا د د$ تتساوى اضلاعهما الثلاثة المتناظرة لاشتراك $ا د$ و $د د = د ا$ و $ا ب = ا د$ فعلى ما صرح به في الدعوى التي تقدمت تتساوى زواياهما المتناظرة وبالجملة زاوية $ب$ تكون مساوية لزاوية $د$

وثانيا اذا كانت زاوية $ب =$ زاوية $د$ فضع $ا د = ا ب$ لانه ان لم يكن $ا ب$ مساويا لـ $ا د$ وكان $ا ب$ اكبرهما يؤخذ $ه د = ا د$ ويوصل $ه د$ ويساواة اضلعي $ه د$ و $د ب$ اضلعي $ا د$ و $د ب$ وتكون زاوية $ه د ب$ بين الاولين مساوية لزاوية $ا د ب$ بين الثانيين يلزم تساوي ما بين من اقسام مثلثي $ه د ب$ و $ا د ب$ (١٢) فزاوية $ه د ب = ا د ب$ وقد فرض مساواتها لزاوية $ا د ب$ فيلزم ان تكون زاوية $ه د ب = ا د ب$ وبذا يلزم مساواة الجزء لكل وهو محال فكان عدم المساواة بين $ا ب$ و $ا د$ المقابليين زاويتي $ب$ و $د$ المتساويتين غير ممكن وبثبت المطلوب من ان ضلع $ا ب$ مساو لضلع $ا د$

تبيينه مساواة زاوية α زاوية β وزاوية γ زاوية δ
 ثابتة بالطريق الذي سبق ولقيام زاويتي β و δ علم ان القوس اواصل
 من رأس مثلث متساوي الساقين الى وسط قاعدته يكون عمودا عليها ويقسم
 زاوية الرأس الى قسمين متساويين

• (الدعوى السادسة عشرة النظرية) •

(شكل ٢٣٢) اذا كانت زاوية α اكبر من زاوية β في مثلث $\alpha - \beta - \gamma$
 الكروي فضع δ المقابل لزاوية α يكون اكبر من ضلع δ المقابل
 لزاوية β

وبالعكس اذا كان ضلع δ اكبر من ضلع γ فزاوية α تكون اكبر
 من زاوية β

بيان ذلك اولان نقول حيث ان زاوية $\alpha < \beta$ فاذا انشئت زاوية β
 = لزاوية β يصير $\alpha = \beta$ (١٥) لكن مجموع $\alpha + \beta + \gamma$
 اصغر من ضلع δ فاذا وضع δ مقام α ظهر ان يكون $\delta < \alpha + \beta$
 و $\delta < \alpha + \beta$

وثانيا اذا فرض $\delta < \gamma$ فزاوية β تكون اكبر من زاوية α
 $\alpha - \beta - \gamma$

لانه اذا تساوت زاوية α زاوية β يصير $\alpha = \beta$ واذا
 كانت $\alpha > \beta$ يكون $\delta > \gamma$ كما ذكرنا فاول كل فيه خلاف
 لما فرض ومن ثمة ثبت المطلوب من ان تكون زاوية α اكبر من زاوية β
 $\alpha - \beta - \gamma$

• (الدعوى السابعة عشرة النظرية) •

(شكل ٢٣٣) اذا تساوى ضلعا α و β من مثلث $\alpha - \beta - \gamma$ ضلعي δ و γ
 من مثلث $\delta - \gamma - \epsilon$ وكانت زاوية α اكبر من زاوية β فضع δ الثالث
 من المثلث الاول يكون اكبر من ضلع ϵ هو من الثاني وحسبنا في اثبات هذه
 ما صرح به في الدعوى العاشرة (من المقالة الاولى)

• (الدعوى الثامنة عشرة النظرية) •

إذا كان المثلثان المرسومان على كرة واحدة أو كرات متساوية متساويي الزوايا
فهما متساويي الأضلاع

فإذا كان α و β مثلثين معلومين و γ و δ مثلثهما القطبيين يلزم من تساوي الزوايا في مثلثي α و β أن يكون مثلثا γ و δ القطبيين متساويي الاضلاع (١٠) ولكن تساوي اضلاع مثلثي γ و δ القطبيين تتساوي زواياهما (١٤) وبذلك نظهر انه متى تساوت الزوايا في مثلثي γ و δ تساوت الاضلاع (١٠) فلذا ظهر تساوي الاضلاع من مثلثي α و β القطبيين التساويي الزوايا هذا وسيبذل كرايات هذه الدعوى في المثلث القطبي فراجع ان شئت

(شكل ٢٢٤) اذا تساوت زوايا مثلثي $\triangle ABC$ و $\triangle DEF$ اذ اعني اذا كانت
 $\angle A = \angle D$ و $\angle B = \angle E$ و $\angle C = \angle F$ و $\angle A = \angle D$ و $\angle B = \angle E$ و $\angle C = \angle F$
 دو و $\angle C = \angle F$ هو $\angle C$ فاذ اخذ $\angle C = \angle F$ و $\angle A = \angle D$ على استقامة
 ضلعي AC و DF و وصل AD و CF و AD و CF حتى التقيا في نقطة
 P و كفتساوي ضلعي AD و CF و $\angle A = \angle D$ و $\angle C = \angle F$ بالمثل وحيث كانت
 زاوية $\angle A = \angle D$ و $\angle C = \angle F$ هو $\angle C$ فقتساوي الاقسام على الترتيب في مثلثي
 $\triangle APC$ و $\triangle DPF$ (١٢) و بناء عليه تكون زاوية $\angle A = \angle D$ و $\angle C = \angle F$
 و زاوية $\angle A = \angle D$ و $\angle C = \angle F$ و لا شئ الا ضلع AD و CF في مثلثي
 $\triangle APC$ و $\triangle DPF$ و $\angle A = \angle D$ و $\angle C = \angle F$ وكون مجموع
 زاويتي $\angle A + \angle B$ و $\angle D + \angle E$ مساويا لثلاثين و مجموع زاويتي $\angle A + \angle B$
 و $\angle D + \angle E$ فقتصير زاوية $\angle A = \angle D$ و $\angle C = \angle F$ فلذا اتساوي مثلثا $\triangle APC$
 و $\triangle DPF$ (١٣) و من ثمة كان $AD = CF$ و $AC = DF$ و ايضا من
 كون زاوية $\angle A = \angle D$ و $\angle C = \angle F$ و $\angle A = \angle D$ و $\angle C = \angle F$ اتساوي
 احدى الاضلاع و مجاورتيه من الزوايا في المثلثين المرقومين فيكون $\angle A = \angle D$
 $\angle B = \angle E$ و $\angle C = \angle F$

فإذا طرح من $س$ كروطر المتساويين $د$ و طح المتساويان الاثنان
 يبقى $ب$ و $م$ $ع$ متساويين ومن كون زاوية $د$ = $أ$ $ع$ و زاوية
 $أ$ = $د$ $ع$ يتساوى مثلثا $أ$ و $د$ $ع$ لتساوى آحاد الاضلاع فيهما
 والزوايا متساوية ولما واد $د$ كل قسم من مثلث $د$ هو لكل قسم من مثلث $أ$ $ع$
 يصير مثلث $د$ هو ايضا مساويا لمثلث $أ$ و $م$ $ع$ ومن ثمة يكون $أ$ = $د$
 و $أ$ = $د$ و $د$ = $م$ $ع$ هو قطره اذ انساوت الزوايا من المثلثين
 الكرويين يتساوى منهما الاضلاع

تنبيه ما ذكر في هذه الدعوى لا يجري في المثلث المستقيم الاضلاع • لانه اذا
 تساوت جميع الزوايا في المثلث المستقيم الاضلاع لا يحكم على اضلاعها
 الا بالتناسب وبهذه تبين الاختلاف بين المثلثات المستقيمة الاضلاع والكروية
 بأسهل طريق في هذه الدعوى وفي (١٢) و (١٣) و (١٤) و (١٧) وقد صار
 البص من تقدير المثلثات بعضها وانضم بيانها سواء كانت موضوعة على كرة
 واحدة او كرات متساوية

وقد ذكرنا ان الاقواس المشابهة تناسب انصاف اقطارها فلا يصح التشابه بين
 المثلثين المرسومين على كرتين متساويتين طالما يكونا متساويين فلذا صار تساوى
 الزوايا موجبا لتساوى الاضلاع واما اذا كانت المثلثات موضوعة على كرات
 غير متساوية فانما تتشابه تلك المثلثات اذا تساوت الزوايا وتكون النسبة بين
 اضلاعها كالنسبة بين انصاف اقطار تلك الكرات

• (الدعوى التاسعة عشرة النظرية) •

بمجموع زوايا المثلث الكروى اصغر من ست قوائم واكبر من قائمتين
 وبيان ذلك اولاً ان كل زاوية في مثلث كروى اصغر من قائمتين (نظرا الى التنبيه
 الآتى) فلذا كان مجموع زوايا المثلث الكروى الثلاث اصغر من ست قوائم
 وثانياً ان مقدار كل زاوية في مثلث كروى يساوى نصف المحيط اذا طرح منه
 الضلع المقابل لها من المثلث القطبي (١٠) فلذا كان مقدار مجموع الزوايا الثلاث
 من المثلث الكروى يساوى التفاضل بين ثلاثة انصاف المحيط وبين مجموع

الاضلاع الثلاث من المثلث القطبي ولكون هذا المجموع الاخير اصغر من محيط دائرة عظيمة (٤) اذا طرح من ثلاثة اقسام المحيط غالباً في يكون اكبر من نصف المحيط أعني القائمتين ومن ثمة ظهر ان مجموع الزوايا الثلاث من كل مثلث كروي يكون اكبر من قائمتين

(نتيجة ١) مجموع الزوايا الثلاث في المثلث الكروي ليست على قرا واحد كما في المثلث المستقيم الاضلاع بل يزيد ويتقص بمحصولا بين قائمتين وست قوائم غير مساو لاحدهما ومن ثمة اذا علمت زاويتاه فلاتتبعين الثالثة

(نتيجة ٢) قد يكون في المثلث الكروي قائمتان وثلاث ومنقرجتان وثلاث (شكل ٢٣٥) اذا كان مثلث ABC قائم الزاويتين A و B في اذا كانت زاويتا C و D قائمتين تكون رأس A قطب قاعدة BC (٦) وكل واحد من ضلعي AC و BC يكون ربعا

وماعدا هذا اذا كانت زاوية A ايضا قاعدة لمثلث ABC الكروي يكون قائم الزوايا الثلاث لم يتنذ تكون كافة زواياه قوائم واضلاعه اربعا المثلث الكروي القائم الزوايا الثلاث يحتمل عليه سطح الكرة ثمان مرات وسيرى في الشكل ٢٣٦ قوس MD ربعا

تنبيه في الدعاوى التي تقدمت يفرض ان ضلع المثلث الكروي اصغر من نصف المحيط لما صرح به في الحد الما دس فلذا لا يتكون المثلث الا وزاويتيه دون قائمتين

(شكل ٢٣٤) اذا كان ضلع AB اصغر من نصف المحيط وكذا AC فلاجل التقاطع بين القوسين في نقطة D يمكن ان يجربا معا

ومن كون مجموع زاويتي A و B قدر قائمتين تكون زاوية C و D وحدها اصغر من قائمتين

ومن المشاهد في المثلثات الكروية ما بعض اضلاعه اكبر من نصف المحيط وبعض زواياه اكبر من قائمتين بحيث اذا امتد ضلع AB على ان يتم محيط ABC الكامل وطرح مثلث ABC من نصف الكرة يبق مثلث يسمى ABC اضلاعه

ا- و- و ا هـ و- و ضلع ا هـ و- اكبر من نصف محيط ا هـ و- زاوية
 - المقابلة له قد تجاوزت القاعتين بمقدار و-
 تذييل يشاهد ان زيادة الاضلاع والزوايا كبر اقوى الى التجاوز عن حدود
 المثلثات وتعرف قائم الكن حل تلك المثلثات وتحديد اقسامها لم يزل منحصر الى
 التعريفات بلا تجاوز عن حدودها لانه اذا طرح مثلث ا- و- من نصف الكرة
 وهو معلوم الاضلاع والزوايا فلا يجرم ان الزوايا والاضلاع من المثلث الباقي
 تعلم بسهولة

(الدعوى العشرون النظرية)

(شكل ٢٣٦) نسبة شقة ا- و- الى سطح الكرة كنسبة م ا- زاوية
 الشقة الى اربع قوائم او كنسبة قوس م- مقدار تلك الزاوية الى المحيط
 وليفرض ان نسبة قوس م- الى محيط م- و- ك كنسبة بين عددين
 صحيحين كنسبة عدد هـ الى عدد ٤٨ مثلا فاذا قسم محيط م- و- ك الى
 ثمانية واربعين جزءا متساوية فيحتوى قوس م- على خمسة منها ثم اذا وصل
 بين قطب آ ونقط التقسيم باربع بقدر ذلك يحدث في نصف كرة ا- م- و- ك
 ثمانية واربعون مثلثا متساوية حيث تساوت اقسامها ولا يجرم ان الكرة الكاملة
 قد احتوت على ست وتسعين مثلثا وشقة ا- م- و- ك تحتوي على عشرة مثلثات
 فعلى هذا تكون نسبة الشقة الى الكرة كنسبة عدد ١٠ الى عدد ٩٦ او كنسبة
 عدد ٥ الى عدد ٤٨ يعنى كنسبة قوس م- الى المحيط ومن هذه الادلة التي
 ذكرنا ثبت ان النسبة بين قوس م- والمحيط كنسبة الشقة الى الكرة وان لم
 يكن مقياس مشترك بينهما وبين المحيط

(نتيجة ١) النسبة بين الشقتين كنسبة بين زاويتيها

(نتيجة ٢) قد ذكر ان سطح الكرة يساوى ثمانية مثلثات قائمة الزوايا الثلاث (١٩)
 فاذا جعل احد هذه المثلثات واحدا يكون سطح الكرة ٨ أمثاله اذا علمت ما ذكر
 يعبر عن سطح الشقة التي زاويتيها ١ بمقدار ٢ وذلك معنى قدوت زاوية ١
 يجعل القائمة واحدا حيث كانت ٢ : ١ :: ٨ : ١ : ٤ فقد وجد ههنا

حدان مختلفان احدهما من جنس الزاوية وهي القائمة والاخر من جنس
السطح وهو المثلث القائم الزوايا الثلاث الذي اضلاعه اربع
تنبيه نسبة ضلع الكرة المحصور بين مستويي ا-م و ا-ح الى جسمها
الكامل كنسبة زاوية ا الى اربع قوائم لانه متى تساوت الشقوق تساوت
اضلاع الكرة فلذا كانت النسبة بين ضلي الكرة كالنسبة بين الزاويتين
المحاطتين بمستوييهما

• (الدعوى الحادية والعشرون النظرية) •

المثلثان الكرويان المتماثلان متساويان سطحا

(شكل ٢٣٧) اذا كان مثلثا ا-ح و د-ه و مقابليهما عني ان ا-ح = د-ه
و ا-ج = د-و و ه و ولم يمكن تطبيق احدهما على الاخر فسطح مثلث
ا-ح مساو لسطح مثلث د-ه و

فتجعل نقطة ب قطبا للدائرة الصغيرة التي تمر بنقط ا و ح الثلاث (١)
ويرسم من هذه النقطة اقواس ب-ا و ب-ب و ب-ح المتساوية (٦) ويرسم
زاوية د-و من نقطة د مساوية لزاوية ا-ح ب ويرسم قوس د-و
مساويا لقوس ح-ب ويوصل د-و و ه و

فمثلثا د-و و ا-ح متساويان لتساوي الاقسام كما افهمنا حيث تساوى ضلعا
د-و و د-و و ضلي ا-ح و د-و وزاوية د-و = ا-ح (١٢) فتساوى ضلع
د-و ضلع ا-ح وزاوية د-و = ا-ح

ولتساوي زاويتي د-ه و ا-ح المقابليتين اضلي د-ه و ا-ح المتساويين
في مثلثي د-ه و ا-ح المتقدمين (١١) اذا طرحت منهما زاويتا د-و
و ا-ح المتساويتان بالعمل تبقى زاويتا د-ه و ا-ح متساويتين
ولساوت ضلي د-و و د-ه اضلي ب-ح و د-و و وجود التساوي بين جميع
اقسام مثلثي د-ه و ح-ب يكون ضلع د-ه = ب-ح وزاوية
د-ه = ح-ب

فالآن اذا نظرت في مثلثي د-و و ا-ح بعين فكر ترى ان الاضلاع المتناظرة

متساوية وأنه يمكن تطبيق أحدهما على صاحبه حيث كانا متساوي الساقين
 لأنه إذا وضع ضلع $سا$ على $قو$ المتساوي فيقع $سح$ على $قو$ المتساوي
 فمن أجل ذلك اختلط المثلثان وانقدا فلذا وقع التساوي ومن ثمة كان سطح
 $سقو = اره$ وكذلك أثبت أن سطح $وقه = اره$ و سطح
 $وقه = اره$ فعلى هذا صار $سقو + وقه = وقه = اره$
 $+ اره = اره$ أو $دوه = اره$ فقد انضمت تساوي مثلثي
 $ارح$ و $دهو$ سطحا

• (تنبيه) • حيث يمكن وقوع قطبي $سوق$ داخل مثلثي $ارح$ و $دهو$ فحينئذ
 يجب انضمام ثلاثة مثلثات $سوق$ و $وقه$ و $سح$ لتركيب مثلث $دهو$
 ومثل ذلك يجب لتركيب مثلث $ارح$ من $ارح$ و $حرو$ و $ار$ الثلاث
 الاخر والاثبات فيه وفيما ينتج منه على وتيرة واحدة
 • (الدعوى الثانية والعشرون النظرية) •

(شكل ٢٣٨) إذا تقاطعت دائرتا $اع$ و $حرو$ في كبراد في نصف كرة
 $اعح$ و $سح$ فمجموع مثلثي $اعح$ و $سح$ المتقابلين مساو لشقة التي زاويتيها
 $سح$

لأنه إذا امتد قوسا $سح$ و $سح$ حتى التقيا في نقطة $د$ من النصف الآخر
 من الكرة فقوس $سح$ يكون نصف محيط وكذا $اع$ فيبقى $س = د = اع$
 إذا مارح $ع$ من كل من الطرفين وبغلا يكون $د = ح = ع = و = س = اد$
 فلذا ثبت التساوي بين مثلثي $اعح$ و $سح$ لتساوي اضلاعهما الثلاثة ونظرا
 الى هذا الوضع حيث أنهم امتثلان فهما متساويان سطحا (٢١) ومن أجل ذلك
 ظهر أن يكون مجموع مثلثي $اعح$ و $سح$ مكافئا لشقة $ع = د$ التي
 زاويتيها $سح$ و ثبت المطلوب

تنبيه لقد تبين من هذا أن مجموع الزوايا وهما ما كانت القاعدة فيهما $اعح$
 و $سح$ مكافيا لضلع الكرة وهما ما كانت زاويتيها $سح$
 • (الدعوى الثالثة والعشرون النظرية) •

سطح كل مثلث كروي يساوى التفاضل بين مجموع زواياه الثلاث وبين قائمتين
(شكل ٢٣٩) إذا كان $ا - ح$ المثلث المقروض وامتدت اضلاعه حتى تلاقى
بحسب دائرة د ه و ر العظيمة المرسومة كيقيم الاتفاق خارجا عنه فعلى ما صرح به
فى الدعوى التى سلفت يكون مجموع مائى ا د ه و ا ر ح مكافئا للشقة التى
زاويتها ا ومقدارها $١٢ (٢٠)$ فلذا صار ا د ه + ا ر ح = ١٢ وبمثله
يثبت ان ر و د + ر ط د = ٢ و ح ط ح + ح و ه = ٢
ولزيادة مجموع هذه المثلثات الست عن نصف الكرة بمقدار ضعف مثلث ا - ح
ومقدار نصف الكرة بمقدار بعدد ٤ كان ضعف ذلك المثلث مقدار ا - ح
 $٢ + - ٢ + - ٢ - ٢$ ومن غنة كان مقدار مثلث ا - ح = ١
 $٢ + - ٢ + - ٢ - ٢$ وتبين ان كل مثلث كروي سطحه يساوى التفاضل بين
زواياه الثلاث وبين القائمتين

(نتيجة ١) مثلث ا - ح المقروض يحتوى على المثلث القائم الزوايا الثلاث اعنى
عن الكرة المتخذ احدا بقدر ما فى تلك المساحة من قائمة (٢٠) مثلا اذا كانت
كل واحدة من زواياه $\frac{\pi}{4}$ قائمة فمجموع الزوايا الثلاث منه يساوى اربع
قوائم وتعين مساحته هكذا $٤ - ٢$ او ٢ وهو مقدار اشتمال المثلث
المقروض على المثلث الواحدى وهو عن الكرة ومن غنة كان مجموع المثلثين القائمتين
الزوايا الثلاث مساويا لربع الكرة

(نتيجة ٢) لوجود التكافى بين مثلث ا - ح والشقة التى زاويتها $١ + - ١ + - ١ - ١$
وجب التكافؤ بين الهرم المثلثى الذى قاعدته ا - ح وبين ضلع الكرة لذى
زاويه $١ + - ١ + - ١ - ١$

تنبيه كما قدر مثلث ا - ح الكروى بالمثلث الكروى القائم الزوايا الثلاث
يقدر الهرم الكروى القاعد على ا - ح بالهرم القائم الزوايا الثلاث
ويظهر من هذا عين ما ذكر من التناوب وتقدير مجسمة رأس الهرم بحسبة
رأس الهرم القائم الزوايا الثلاث وذلك بحسبى على ما صرح به من الاقسام * لانه
مضى انطبقت قواعد الاهرام انطبقت ذواتها وانطبقت رؤس زواياها المجسمة

ويستنتج من هذا التقييما

الاولى النسبة بين الهرمين الكرويين كالنسبة بين قاعدتيهما واذا أمكن تقسيم الهرم ذى الاضلاع الكثيرة الى اهرام مثلثة تبين ان النسبة بين مطلق الاهرام كالنسبة بين قواعدها الكثيرة الاضلاع

الثانية لاتحاد تناسب بين القواعد وبين الرؤس المجسمة اذا اريد تقدير زوايتين مجسمتين يلزم وضع رؤسهما في مركزى كرتين متساويتين ومن ثمة صارت النسبة بين هاتين المجسمتين كالنسبة بين المضلعين المحصرين بين مستويين متوازيين حيث تشكلت الزاوية المجسمة في الهرم القائم الزوايا الثلاث من ثلاث مستويات متعامدة قد صرح تسميتها زاوية مجسمة قائمة واستحسن اتخاذها مقياسا للتقدير مساوياها من المجسمات وكان ذلك من باب اولى فاذا علمت ما ذكره القاعد الذى يرى مساحة المثلث الكروى كذلك يكون مقدار الزاوية المجسمة المقابلة له مثلا اذا كانت مساحة المثلث الكروى $\frac{2}{3}$ من المثلث القائم الزوايا الثلاث فمساحة الزاوية المجسمة التى تقابلها تساوى $\frac{2}{3}$ من المجسمة القائمة قنأمل

• (الدعوى الرابعة والعشرون النظرية) •

المساحة السطحية من المضلع الكروى تساوى تفاضل بين مجموع زواياه وبين حاصل ضرب عدد اضلاعه بعد حذف اثنين بمقدار قائمتين

(شكل ٢٤٠) فاذا وصات اقطار احواء من رأس ١ الى جميع الرؤس الاخر فيقسم مضلع احواء الى مثلثات بعدد اضلاعه الاثنين وقد سبق ان كل مثلث مساحة سطحه تساوى الباقي عند طرح قائمتين من مجموع زواياه وقد علم ان زوايا المضلع عين الزوايا من المثلثات ومن اجل ذلك تبين ان مساحة السطح المضلع تساوى الباقي اذا طرح من مجموع زواياه حاصل ضرب القائمتين بعدد اضلاعه بعد حذف اثنين وثبت المطلوب

تنبيه اذا فرض ان مجموع زوايا المضلع الكروى سم وعدد اضلاعه د والقائمة احد مساحة سطحه تكون $\text{سم} - ٢$ ($\text{د} - ٢$) أو $\text{سم} - ٢$ $\text{د} + ٤$ قنأمل

• (الدعوى الخامسة والعشرون النظرية) •

اذا كان عدد الزوايا الجسم من كثير السطوح n وعدد وجوهه f وعدد
 سروره اعني حدوده l اقول لا يزال $n + f = l + 2$ فتؤخذ
 نقطة داخل كثير السطوح ومنها توصل خطوط مستقيمة الى رؤس الزوايا كلها
 ثم تجعل تلك النقطة مركزا وبنم قوس سطح كروي تلاقي بالخطوط المرقومة
 في نقط بعددها وتوصل ما بين النقط المذكورة بقواس دوائر عظام بذلك يتصور
 تشكيل مضلعات كروية تكون مقابلة لوجوه كثير السطوح المقروص وتتحد بها
 عددا

(شكل ٢٤٠) مثلا اذا كان n حده احدا المضلعات المذكورة ونفرض عدد
 اضلاعه l ومجموع زواياه $(a + b + c + \dots)$ فتكون مساحة
 سطحه $n - 2$ وكذا يستخرج البواقي من المضلعات فاذا
 اجتمعت قيموعها اوسط الكرة الذي قد تعين بعدد n يساوي مقدار مجموع
 كافة زوايا تلك المضلعات ناقص ضعف عدد الاضلاع زائد اربعة امثال الوجوه
 الموجودة وحيث ان ما يمكن حصره من الزوايا المسطحة حول نقطة a قدر اربع
 قوائم يكون مقدار مجموع زوايا المضلعات \ll كافة مساويا لاربعة امثال
 الزوايا الجسم اعني حاصل ضرب عددها في اربعة وهو $4n$ ثم يكون ضعف
 اضلاع $a + b + c + \dots$ الخ قدر اربعة امثال عدد الحروف اعني مقدار l
 لان الحرف الواحد ضلع مشترك لوجهين فاذا $4n = 4l + 4 - 2$ ومن ثمة ثبت المطلوب
 من ان يكون $n + f = l + 2$

نتيجة لقد تبين من هذه الدوى ان مجموع الزوايا المسطحة التي تحيط بالزوايا
 الجسم تحتوي على القوائم الاربع بقدر ما في $n - 2$ من الاحاد وانما
 جعلت n لاجل اظهار ما بينة عدد الزوايا الجسم من كثير السطوح
 لانه اذا نظر الى احد وجوه الجسم الذي عدد اضلاعه l وجدت مجموع زواياه
 $2 - 4$ زوايا قوائم (مقالة ١) لكن حيث ان مجموع مقادير $2 - 4$ اضعف
 عدد اضلاع سائر الوجوه $4 - 1$ وان الحاصل من اخذ الوجوه 4 مرات

٤ = ح فكان مقدار مجموع الزوايا من كافة الوجوه ١٤ - ٤ ح ومن كون
 ١ - ح = ح - ح على ما صرح به آتفا من هذه الدعوى فتكون
 ١٤ - ٤ ح = ح - ح (ح - ح) فهذا مقدار مجموع الزوايا المثلثة التي تحيط
 بالجمجمة

• (الدعوى السادسة والعشرون النظرية) •

(شكل ٢٧٢ و ٢٧٣) اعظم المثلثات الكروية الموضوعية بضلعى ح - و ا ح
 المعلومين وثالث على اى وجه • مثلث ا - ح - د الذى تكون زاويته ح المحصورة
 بين الضامعين المعلومين مساوية لمجموع زاويتي ا و - الاخرين فليقتد ضلعها
 ا ح و ا - ح حتى يلتقيان نقطة د يحدث ح - د المثلث الكروى تكون زاوية
 د - ح مساوية لمجموع زاويتي د - ح و ح - د الاخرين لان مجموع زاويتي
 ح - د + ح - د مساوئ اثنتين وكذا مجموع زاويتي ح - ا + ح - د
 فلذا يصير ح - د + ح - د = ح - ا + ح - د فاذا ضمت زاويتنا
 ح - د و ح - ا المتساويتان لكل من طرفي تلك المعادلة يكون ح - د +
 ح - ا + ح - د = ح - د + ح - د + ح - ا ولقد فرض كون
 ح - د = ح - ا + ح - ا فيكون ح - د = ح - د + ح - د + ح - د
 فاذا رسم ح - ط على ان يكون ح - ط = ح - د فيصير ح - د =
 ح - د ومن كون مثلثى ط - ح - د و ط - د - ح متساويي الساقين كان ط ح
 = ط - د = ط د وتقع نقطة ط في وسط ح د وتكون على ابعاد
 متساوية من نقط - و ح و د الثلاث وكذلك ثبت ان نقطة ح وسط
 خط ا - ح تكون على ابعاد متساوية من نقط ا و - و الثلاث
 (شكل ٢٧٢) الا ان اذا كان ح ا = ح ا وزاوية ح - ا < ح - ا
 ووصل ا - ح وايضا اذا امتد قوسا ا ح و ا - ح حتى يلتقيان نقطة د فقوس
 ح ا يصير نصف محيط وكذا قوس ح ا وحيث ان ح ا = ح ا ايضا
 يكون ح د = ح د لكن في مثلث ح ط د ضلع ح ط + ط د < ح د

فلذا يصير $\angle د - ح ط$ أو $\angle ط < د$ فاذا قسمت زاوية ط
من مثلث $ح ط$ المتساوي الساقين الى قسمين متساويين بقوس $ه ط$ و
فهذا القوس يكون عمودا على وسط $د ح$ فاذا اخذت نقطة ل بين نقطتي ط
و ه فبعد نل المساوي ل بعد ل د يكون اصغر من $\angle ط$ لان $ر ل +$
 $د ل > ح ط + ط د$ كما صرح به في التاسعة من المقالة الاولى فاذا انصف
الطرفان يصير $ر ل > ح ط$ لكن في مثلث $د ل ح$ ضلع $د ل < د ح$ - $د ل$
فوجب ان يكون $\angle د < ح ط$ أو $\angle د < ح ط$ أو $\angle د < ح ط$
ومن اجل ذلك كان $\angle ر ل$ فاذا قسمت نقطة على قوس $ه ط$ و بان
تكون على ابعاد متساوية من نقطتي $د ح$ و $د$ الثلاث فهذه النقطة لا توجد
الا على مخرج قوس $ه ط$ جهة نقطة و

مثلا اذا كانت النقطة المطلوبة ط بان يكون $\angle ط = ر ط = ح ط$
وحيث ان مثلثات $ط د ح$ و $ط د ر$ متساوية الساقين تكون
زواياها $\angle د = ط د ر$ و $\angle د = ط د ر$ و $\angle د = ط د ر$
اي ان زوايا $د ر ح + د ر ط$ مجموعهما مساو لقائمتين وكذا مجموع
زاويتي $د ح ر + د ح ط$ فلذا $\angle د ر ط + ط د ر + ح د ر = ٢$
و $د ح ط + ط د ر + د ح ر = ٢$

فاذا جمع هذان الحاصلان بالدقة كان $\angle ط د ر = ر د ح و د ر ط -$
 $ط د ر = ر د ح - ط د ر = د ر ح = د ر ح$ اي ان $\angle ط د ر = ط د ر$
 $+ د ح ر + ح د ر = ٢$ فعلى هذا صار $د ر ح + ح د ر +$
 $د ح ر = ٢$ (وهي مساحة مثلث $أ د ح$) $= ٢ - ٢$ $\angle ط د ر$ اي ان
تكون مساحة $أ د ر = ٢ - ٢$ من مثل زاوية $ط د ر$ وكذلك في مثلث
 $أ د ح$ مساحة $أ د ر = ٢ - ٢$ من مثل زاوية $ط د ر$ فقد قام

البرهان على ان زاوية ط ر ح اكبر من ط ر ح ومن ثمة كانت مساحة
مثلث أ ر ح اصغر من أ ر ح

(شكل ٢٧٣) اذا اخذ قوس $\alpha = \beta$ وانشئت زاوية أ ح ر >
ر ح ا كذلك يكون البرهان وما نتج منه ولا خفاء من أجل ذلك ثبت المطلوب من
ان يكون مثلث أ ر ح اعظم جميع المثلثات التي رسمت بضلعين من معلومين قد
اخذنا لهما كيفما اراد

• (تنبيه ١) • (شكل ٢٤١) مثلث أ ر ح قابل الرسم بضلعى ر ح و ر -
المعلومين في نصف الدائرة التي قطرها وتر أ ر الضلع الثالث يكون اعظم
المثلثات • لانه اذا كانت نقطة ع وسط ضلع أ ر لم تزل ترى التساوى بين
بعدي ع ح و ع ر فلذا كان محيط الدائرة المرسومة بانقراج ع ح ونقطة ع
قطبها يمر بنقط أ و ر - الثلاث فضلا عن ان يكون مستقيم - أ قطرها •
حيث ان ذلك المذكر يوجد في مستوى الدائرة الصغيرة وفي مستوى دائرة
ر ح ا العظيمة معا (تنبيه ٤ دعوى ١) نوجب وجوده فوق أ ر الفصل
المشترك بينهما وبذلك صار أ ر المرقوم قطرا

• (تنبيه ٢) • حيث كانت زاوية ح في مثلث أ ر ح مساوية لمجموع زاويتي أ و -
تبين ان مجموع الزوايا الثلاث منه يساوى ضعف زاوية ر لكن ثبت ان
هذا المجموع لا يزال اكبر من قائمتين فكانت زاوية ر اكبر من قائمة
• (تنبيه ٣) • اذا امتد ضلعا ر ح و ر - حتى التقيا في نقطة ه فمثلث ر ا ه
يساوى ربع سطح الكرة • لان زاوية ه = $\alpha + \beta$ - ا ر - فلذا كان
مجموع الزوايا الثلاث من مثلث ر ا ه يقاوم زاويا أ ر ح و ا ه و ر ح و -
ر ا ه الاربعة التي مجموعها يساوى اربع قوائم ومن ثمة كان سطح مثلث ر ا ه
= $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$ اعنى ربع سطح الكرة

• (تنبيه ٤) • اذا كان مجموع الضلعين ر ح و ر - المعلومين مساويا لنصف محيط
الدائرة العظيمة او اكبر منها فلا اعظم فيه • لان مثلث أ ر ح يجب رسمه في نصف

محيط دائرة من الكرة واكون مجموع ضامى \angle و \angle اصغر من نصف محيط
 \angle (٢) فكان مجموعهما اصغر من نصف محيط دائرة عظيمة
 وعمايل على عدم الاعظمية انه اذا كان مجموع الضاميين المعلومين اكبر من نصف
 محيط دائرة عظيمة فلا يزال ذلك المثلث يكبر حتى تصبح الزاوية التي بين الضلعين
 المعلومين قدر قائمتين والاضلاع الثلاثة من المثلث تصبح على مستو واحد وقول
 المثلث الى سطح نصف الكرة وحينئذ يخرج عن هيئة التمثيل وهذا كبر دليل
 على ما ذكر

• (الدعوى السابعة والعشرون النظرية) •

اعظم المثلثات الكروية المرسومة بضع معلوم واطراف متساوية معينة ما كان
 ضلعاه الغير المعينين متساويين

(شكل ٢٤٢) مثلا اذا اشترك ضلع \angle المعين في مثلثي \angle و \angle او
 وكان $\angle + \angle = \angle + \angle$ اقول ان المثلث الذي فيه \angle
 $= \angle$ وهو \angle المتساوي السابقين اعظم من مثلث \angle ما ليس
 بتساوي السابقين

لانه متى اشترك جزء \angle بينهما خسر بلك ان يكون مثلث \angle اصغر من
 مثلث \angle ومن كون زاوية \angle المساوية لزاوية \angle اكبر من
 زاوية \angle فيكون ضلع \angle اكبر من ضلع \angle (٢١) ثم يؤخذ \angle
 $= \angle$ ويرسم $\angle = \angle$ ويوصل \angle فثلث \angle \angle \angle يساوي
 مثلث \angle (١٢)

الآن وجب اثبات كون مثلث \angle او مساويه قد \angle اصغر من
 \angle واللازم ان يكون مساويا له او اكبر منه وفي كل حال لم يزل نقطة \angle بين
 نقطتي \angle و \angle فلم يقع نقطة \angle على امتداد خط \angle والا فاقول حيث
 احتوى مثلث \angle على مثلث \angle وخط \angle اقرب بهما من نقطتي
 \angle كان $\angle + \angle + \angle < \angle$ لكن من كون $\angle = \angle$
 $\angle + \angle = \angle + \angle$ و $\angle = \angle$ فصار $\angle -$

$\angle ع + ا - ع - ر + س < ا$ واختصارا $ا - ح$
 $+ س < ا$ او اذا نقلت $ح$ يصير $ا + س < ا + ح$
 $ح$ وهذا بخلاف المفروض اعني $ا + س = ا + ح$ ومن
 ثمة لا يمكن ان تقع نقطة $ق$ الاعلى امتداد $ح$ بين نقطتيه $ح$ و $ع$ فلذا
 ظهر ان مثلث $ق ع ط$ او مساويه $ع د$ اصغر من مثلث $ا ع ح$ وثبت
 المطلوب من ان يكون مثلث $ا ح د$ المتساوي الساقين اكبر من $ا د ر$ الغير
 المتساوي الساقين

* (تنبيه) * لا يحرم ان ماذ كرفي هاتين الاخيرتين بشاه ماذ كرفي الاولى والثانية من
 ملحقات الرابعة وحيث ان المضلعات الكروية تجري بحري المضلعات المستقيمة
 الاضلاع بكل وجه مستدكر اوضاعها

اولان جميع المضلعات الكروية المتساوية الاطراف المتجدة الاضلاع
 عددا اعظمها متساوت اضلاعه قدرا وبرهانه ثابت في الثانية من ملحقات
 الرابعة

ثانيا ان جميع المضلعات الكروية المرسومة باضلاع معلومة سوى ضلع اخير
 يؤخذ كاي را اعظمها ما يمكن رسمه في نصف الدائرة التي يكون وتر الضلع الاخير
 المرسوم قطرها وبرهانه قد ذكر في الدعوى الرابعة من ملحقات المقالة
 الرابعة اسنة باطامن (٢٦) وشرط وجود عظمه ان يكون مجموع الاضلاع
 المعلومة اصغر من نصف محيط دائرة عظيمة

ثالثا اعظم المضلعات الكروية ما يمكن رسمه داخل محيط دائرة من دوائر الكرة
 وقد ذكر برهانه في الدعوى السادسة من ملحقات المقالة الرابعة

رابعا اعظم المضلعات الكروية المتجدة الاضلاع عددا المتساوية الاطراف قدرا
 ما تساوت اضلاعه وزواياها معا

وحسبك في برهانه ماذ كرفي النتيجة الاولى والثالثة فتأمل ان ماذ كرفي خصوص
 اعظم المضلعات الكروية تجري في الزوايا الخمسة التي هي مقدارات تلك المضلعات
 تمت بحسن توفيقه

بيان ملحقات السابعة والسابعة بيان الاشكال كثيرة القواعد المنتظمة

• (الدعوى الاولى النظرية) •

الاجسام الكثيرة القواعد المنتظمة خمسة فقط لا منتظم سواها

وذلك ان جميع الوجود في الكثير القواعد المتظام اشكال مستقيمة الاضلاع منتظمة وكافة الزوايا الجسم، تساوية كما صرح به في التعاريف والحدود مما هو شرط لا بد منه في هذه الانتظام فقد تبين انه لا توجد هذه الشروط الا فيما ذكر من كثيرى القواعد قليلة العدد

تقول اولاً اذا كانت وجوه كثير القواعد المتظام من مثلث، تساوى الاضلاع فكل زاوية مجسمة منه اما ان تصور بثلاث زوايا أو اربع او خمس من زوايا تلك المثلثات ويتفرع من ذلك ثلاثة اجسام منتظمة ذوا اربعة قواعد وذو ثمانية قواعد وذو عشرين قاعدة وهذه الاجسام قد اشتهرت بالاشكال المنتظمة الافلاطونية فلا يوجد غير هذه الثلاثة المذكورة من منتظم يحاط بمثلثات متساوية الاضلاع اصل الان ست زوايا من شكل ذلك المثلث تكفى اربع قوائم وبها يتبع انشاء الجسم (٢١ مقالة ٥)

ثانياً اذا كانت الوجود مربعة وحيث لا تتركب الجسم الامن ثلاث الزوايا منه فبذلك يحصل ذوات قواعد اقل المكعب لا غير لان تركيب الجسم من زوايا ارباع مجتمعة لان ذلك يساوى اربع قوائم ثالثاً واخيراً اذا كان وجهه من خمسة منتظم، فالجسم منه لا تتركب الامن ثلاث الزوايا منه فيحصل المنتظم ذوا اثنى عشرة قاعدة فقط

لا منتظم غير هذه الخمسة المرقومة • لان ثلاثة زوايا من المثلث تساوى اربع قوائم والمربع يبلغ ومن ثمة لا يمكن احداث الجسم بها وثلاثة من تلك الخمسة تحاط بالمثلث المتساوى الاضلاع وواحد بالربع والاخر

بالخمسة كما صرح به

تنبيهه اذا لم أحد وجوه المنتظم يمكن تحديد سائر اقسامه وتحقيق الخمسة اجسام
المرفومة وبيان انشائها اذ كفي هذه الدعوى الثانية

• (الدعوى الثانية العملية) •

طريق انشاء كثير القواعد المنتظمة اذا علم أحد وجوهه او ضلعه فقط

وهذه الدعوى تحل مشكلات تلك الاجسام الخمسة على التوالي

انشاء ذي الاربع قواعد المنتظمة

(شكل ٢٤٣) اذا فرض مثلث $ا ب ج$ المتساوي الاضلاع وجهه الى مقام عمود

$ح$ على مستوى $ا ب ج$ من نقطة $ع$ مركز المثلث المذكور وبعين هذا

العمود في نقطة $س$ بان يكون $ا س = ا ر$ ووصل $س ر$ و $س ج$

فهو $س ا ر ج$ هو الجسم المطلوب

لان ابعاد $ع ا$ و $ع ب$ و $ع ج$ متساوية فتساوي موائ $س ا$ و $س ب$ و $س ج$

لتساوي ابعادها من عمود $س ع$ ومن كون $س ا = ا ر$ كانت الوجوه

الاربعة من ذلك الهرم مساوية لمثلث $ا ب ج$ المتساوي وباضا تكون زواياه

المجمعة متساوية التركيب كل واحدة منها من ثلاث الزوايا المسطحة المتساوية

وحيث تساوت الوجوه والزوايا المجمعة من هذا الهرم قد صار منتظما وثبت

المطلوب

انشاء ذي الست قواعد المنتظمة

(شكل ٢٤٤) اذا كان $ا ب ج د$ مربعا واما وانشئ منشورا قائما على قاعدة

$ا ب ج د$ المرتومة وارفعاه $ا ه$ مساويا لضع $ا ب$ وحيث ان وجوه هذا

المنشور مربعات متساوية وكل واحدة من زواياه المجمعة قد تركبت من ثلاث

الزوايا القائمة فهي ايضا متساوية ومن ثمة ثبت المطلوب من ان يكون ذلك

المنشور منتظما ذات قواعد المنتظمة اي المكعب

انشاء المنتظم ذي الثمان قواعد

(شكل ٢٤٥) اذا كان مثلث $ا ب ج$ متساوي الاضلاع معلوما ورسم مربع

انحد على ضلعه ار ويقام عمود ط منه من مركز ع على مستوى ذلك
المربع وتعين نهاياه ط و س بان تكون ع ط = ع س = ا ع ثم اذا
وصلت خطوط س ا و م ر و ط ا الخ فقسم س ا حو ط المركب من
هرى س ا ب ح و ط ا ح د الرباعين المتلاصقين المشتركين في قاعدة
ا ر ح و هو المنتظم ذو الثمان قواعد المطلوب وقيام مثلث ا ع س في نقطة
ع وكذا مثلث ا ع د فاضلاع ا ع و ع س و ع د تساوى فلذا واجب
تساوى ذينك المثلثين وبصير ا س = ا د وبمثلثات ا ب س و ا د ح
ا ع ط و ر ع س و ح ع ط الخ الاخر مساو لمثلث ا ع د اقام الزاوية
ومن اجل ذلك تساوى كافة اضلاع ا ر و ا س و ا ط الخ فتبين ان جسم
س ا ر حو ط احيط بثمانية مثلثات متساوية الاضلاع كل واحد منها يساوى
مثلث ا ر م متساوى الاضلاع الماهلوم فضلاع ا ر متساوى جميع الزوايا المجسمة
منه مثلا زاوية س ر مساوية لزاوية ح ر

لانه يرى التساوى بين مثلثي س ا ح و د ا ح و قيام زاوية ا س ح فشكل
س ا ط ح بصيرهما يساوى مربع ا ر ح و اذا قدرهم س ر حو ط
بهم س ا ر ح و فقد يمكن اذا تطبق قاعدة ا س حو ط من الاول على
قاعدة ا ر ح و من الثاني ولاشتر ان مركز ع حينئذ تطبق ارتفاع ع ر
من الاول على ارتفاع س ر ع من الثاني فوجب الاتحاد التام بين هذين
الهرمين ومن ثمة صارت مجسمة س ر مساوية لمجسمة س و ثبت المطلوب من
ان يكون جسم س ا ر حو ط منتظما ذا ثمان قواعد

(تنبيه) اذا تقاطعت خطوط ا ح و د و س ط عماد في اواسطها فتم ايات
تلك الخطوط الثلاثة تكون رؤسها منتظم المرقوم فتأمل
انشاء المنتظم ذي الاثني عشرة قاعدة

(شكل ٢٤٦) اذا كان ا ر ح ح مجسما منتظما مع ا لوما وكان كل
واحدة من زاويتي ا ر ف و ح ر ف مساوية لزاوية ا ر ح وتشكلت بهذه
الزوايا المسطحة زاوية ر المجسمة ونوعين الانحراف بين كل اثنين من تلك

المسطحات الثلاث كما مر في الدعوى الرابعة والعشرين من المقالة الخامسة
ويسمى ذلك الانحراف φ وكذلك اذا جرى العمل بانشاء زوايا مجسمة في
نقط φ و φ و φ مساوية لزاوية φ المجسمة فستوى φ و φ يتحد
بمستوى φ و φ لان الانحراف بين كل منهما وبين مستوى φ هو عين
مقدار φ فقدم امكان اعمال خمسين φ و φ و φ مساويا لخمسين φ و φ
في مستوى φ و φ و اذا جرى عين هذا العمل في كل من مستويات φ و φ
و φ هل الخ الاخر يحمل سطح محدب φ و φ الخ مركب من ستة
اشكال مجسمة منتظمة متساوية وكل انحراف واقع بين كل متجاورين هو قدر
المعين بمقدار φ

فاذا كان φ و φ الخ سطحا ثانيا مساويا لسطح φ و φ الخ فاذا الصق احدهما
بالآخر حدث من هذا الاتصال سطح محدب واحد متوال بلا انفصال مشلا
لاجل تشكيل زاوية φ المساوية لزاوية φ المجسمة الاخرى توصيل
زاوية φ و φ بزاوية φ و φ و لا يزال الانحراف بين مستويي
 φ و φ عند الاتصال باقيا بلا تغير

لانه هو الانحراف الذي يلزم عند تشكيل تلك المجسمة لكن عند تشكيل زاوية
 φ المجسمة يطبق ضلع φ و φ على φ و φ المساوية وباجتماع زوايا φ و φ
 φ و φ الثلاث المسطحة ينعضها في نقطة وتشكيل زاوية مجسمة مساوية
لكل واحدة من الزوايا المجسمة المرسومة التي تقدمت ويحصل هذا الاتصال من
غير تبديل لافى زاوية φ و لافى سطح φ و φ الخ حيث تقدم تلاصق
مستويي φ و φ و φ في نقطة φ وقد تبين ان الانحراف بينهما
مساو لمقدار φ وكذا ما بين مستويي φ و φ فاذا جرى العمل
تتابعيا بالاتصاف وتوافقا بالتلاصق مثني يحدث بذلك سطح φ و φ متواليا
لا اتصال فيه ترى انه سطح واحد وهو سطح كثير القواعد المنتظم ذات اثنتي

الاضلاع

فإذا تصور محدد فان يساوى محدد وهو الخ ووضع احدهما على الآخر
الصق ايان تأتى ذات المثالي من احدهما على ذات المثالي من الآخر وحيث
ان الانحراف بين كل مجاورين من تلك المستويات الذى هو ϕ يوافق الزاوية
المجمعة ذات الوجوه الخمس المساوية لزاوية α فمن هذا الصاق الواقع من
غير تبديل ولا تغيير يحدث سطح محدد متوال لا فطور فيه مركب من عشرين
مثلثا متساوية الاضلاع وهو سطح كثير القواعد المنتظم ذي العشرين قاعدة
وجميع زواياها المجمعة تكون متساوية

• (الدعوى الثالثة العملية) •

طريق وجود الانحراف بين الوجهين المتجاورين من منتظم كثير القواعد
هذا ينتج من الاعمال السابقة في الاشكال الخمسة الاطلاونية المتقدمة متعم
ما صرح به في الدعوى الرابعة والعشرين من المقالة الخامسة وهو ان تعيين
الزاوية بين المستويين من زاوية شجعة وزواياها المسطحة الثلاث معلومة
(شكل ٢٤٣) تتشكل الجسمة من ذى اربع قواعد بثلاث زوايا متساوى
الاضلاع فعلى ما صرح به في الرابعة والعشرين المرقومة تسخرج الزاوية التى
بين المسطحات وبذلك يصير استنتاج ذلك الانحراف

(شكل ٢٤٤) الزاوية الجسمة الواقعة بين المتجاورين فى ذى ستة قواعد قائمة
(شكل ٢٤٥) الزاوية الجسمة فى ذى ثمان قواعد حيث تشكلت من زاويتى
المثلث المتساوى الاضلاع وقائمة فالانحراف بين زاويتى المثلث هو انحراف
وجهى الجسم المذكور

(شكل ٢٤٦) حيث تشكلت الجسمة فى ذى اثنتى عشرة قاعدة من ثلاث
زوايا الخمس المنتظم فالانحراف بين كل اثنتين منها هو انحراف وجهى
الجسم المرقوم

(شكل ٢٤٧) حيث تشكلت الزاوية الجسمة فى ذى عشرين قاعدة من مثلى
زوايا المثلث المتساوى الاضلاع وأحد زوايا الخمس فالانحراف بين زاويتى

المثلث هو انحراف وجهي الجسم المرقوم

• (الدعوى الرابعة العملية) •

طريق استخراج نصف قطر الكرة المرسومة داخل كثير القواعد المنتظم ونصف
الكرة المرسومة عليه وضله معلوم
اولا لابد من اثبات ان كل منتظم كثير القواعد يمكن رسمه داخل الكرة
وخارجها

(شكل ٢٤٨) اذا كان $ا$ ضلعاً مشتركاً بين وجهي كثير القواعد المنتظم
و $ج$ و $هـ$ مركزي ذين الوجهين فعمودا $د$ و $و$ هما النازلان من المراكزين
على ضلع $ا$ المشترك يلتقيان وتوعا في نقطة $د$ وسطه وتحدد زاوية بين
هذين العمودين مساوية لانحراف السطحين المتجاورين المعينين بكأ $د$
في الدعوى العملية السابقة فاذا أخرج عمودا $د$ و $و$ هـ من غير تحديد
على $د$ و $هـ$ في مستوى $د$ هـ فيلتقيان في نقطة $ع$ وهي مركز الكرة
المرسومة داخلها وخارجاً ونصف قطرها $ا$ و $ع$ ونصف قطرها الثانية $ع$
ولتساوي $د$ و $و$ هـ وهما البعدين المراكزين واشتركتا وتر $د$ و $ع$
التساوي بين مثلثي $د$ و $ع$ و $د$ هـ قائمي الزاوية (مقالة ١٩) فعمود $د$
يساوي عمود $ع$ هـ ومن حيث ان ضلع $ا$ عمود على مستوى $د$ هـ
فمستوى $ا$ و $د$ عمود على مستوى $د$ هـ وهو ايضا عمود عليه (مقالة ٥)
ولكون خط $د$ و $ع$ في مستوى $د$ هـ عمودا على $د$ و $و$ فمستوى مشترك
مستوي $د$ هـ و $ا$ و $د$ فهو عمود على مستوى $ا$ و $د$ (١٨ مقالة ٥)
وكذلك يصير خط $د$ و $ع$ عمودا على مستوى $ا$ و $د$ فعلم ان عمودي
 $د$ و $و$ هـ الخارجين في مستوي الوجهين المتجاورين من مركزيهما
يلتقيان في نقطة $ع$ ويكونان متساويين •

الآن اذا جعلت وجهي $ا$ و $ا$ المتجاورين أي وجهي المنتظم
تلا يزال $د$ بعد المركز على ما هو عليه من الكبر وكذا زاوية $د$ و $ع$ نصف
زاوية $د$ هـ ومن أجل هذا تساوى مثلث $د$ و $ع$ وضله $د$ و $ع$ في جميع

وجوه كثيرا القواعد

فعلى هذا إذا رسمت كرة نصف قطرها ح ومركزها ع فمركز جميع
مراكز وجوه كثيرا القواعد على طريق القياس (لأن مستويي اسه و اسد
عمودان على نهاية نصف القطر) وتلك الكرة هي المرسومة داخل كثيرا القواعد
أو كثيرا القواعد هو المرسوم عليها فإذا وصل مائلا ع ا و ع ب يكونان
متساويين لأنهما من العمود متساويي الابعاد حيث كان $\text{ح ا} = \text{ح ب}$
وكذا كل خطين مائلين بصلان من مركز ع الى نهايتي ضلع ما

جميع تلك الموائل متساوية فإذا جعلت ع مركزا ورسم سطح كرة نصف قطر
 ع ا فهذا السطح يمر بجميع رؤس زوايا كثيرا القواعد والكرة هي المرسومة
فوق المنتظم ويقال له المرسوم داخل الكرة فإذا علمت ذلك فلاحظ في اجراء
العمل من تلك الدعوى كما سيأتي

ثانيا (شكل ٢٤٩) إذا علم أحد اضلاع وجه من كثيرا القواعد ورسم ذلك الوجه
وبعد المركز فيه د فيستخرج الاعتراف بين الوجهين المتجاورين من كثيرا
القواعد كما صرح به في الدعوى التي تقدمت وقسازاوية د ه مساوية له
ويؤخذ د ه مساويا لخط د ب ويقام عمود ح ع وه ع على د ه
فهذان العمودان يلتقيان في نقطة ع و ح ع يكون هو نصف قطر الكرة
المرسومة داخل كثيرا القواعد فإذا أخذ ح ا مساويا لنصف قطر الدائرة
المرسومة فوق وجه من وجوه كثيرا القواعد على استقامة د ب الخارج يكون
 ع ا هو نصف قطر الكرة المرسومة على المنتظم

لان مثلثي د ع ب و ح ا ع قائمي الزاوية المذكورين في الشكل ٢٤٩ هما
عين المرقومين في الشكل ٢٤٨ فضلا عن ان يكون خطا د ب و ح ا نصفي قطر
للدائرة المرسومة في احد وجوه كثيرا القواعد المرسومة عليه وان يكون
 ع ب و ع ا نصفي قطر للكرتين المرسومين داخل المنتظم وخارجه

(تنبيه) قد استخرج من الدعوى التي تقدمت نتائج

أولاه انه يمكن تقسيم كل منتظم الى اهرام متساوية مشتركة رؤسها في نقطة هي

مركز المنتظم فضلا عن كونها مركز الكرة المرسومة داخله وخارجه
 ثانيا ان مساحة كثير القواعد المنتظم مساوية لحاصل ضرب سطحه في ثلث
 نصف قطر الكرة المرسومة داخله
 ثالثا ان كثير القواعد المنتظمين متحد الاسم يسميان جسمين متشابهين
 وتناسب اضلاعهما المتناظرة تناسبية بين انصاف اقطار الكرات المرسومة
 داخلهما وخارجهما كالتسوية بين اضلاعهما
 رابعا انه اذا رسم جسم كثير القواعد منتظم داخل الكرة فالمستويات المرسومة
 من مركزه بطول اضلاعه المتعددة تقسم سطح الكرة الى مضلعات متساوية
 متشابهة بعدد وجوه المنتظم والله المجد والمنة على كل حال والصلاة والسلام على
 سيدنا محمد بالغدو والاحمال وبه ثقتي

(المقالة الثامنة)

في الاجسام المستديرة الثلاث

الحدود

١ (شكل ٢٥٠) الجسم الحاصل من دوران مستطيل نحو احد حوله
ضامه α - الثابت يسمى اسطوانة وفي هذه الحركة لا يزال ضامها α و β و γ
موجودين على α ويرسمان دائرتي α و β و γ حرك التساويتين وتسميان
قاعدتي الاسطوانة وضع γ يرسم السطح المحدب وضع α الثابت يسمى
محور الاسطوانة

كافة المقاطع المنشأة عمدا على المحور ونحو α لم هي دوائر وكل واحدة منها
تساوي القاعدة لانه متي دور مستطيل α حول ضلع α نخط α و
العمود عليه يرسم مستويا محيطيا يساوي القاعدة وما هو الا مقطع المنشأ
عمودا على المحور في نقطة α

كافة المقاطع المنشأة تبعا للمحور ونحو β و γ يكون ضعفت α و β
المستطيل الاصلى

٢ (شكل ٢٥١) الجسم الحادث من دوران مثلث α - القائم الزاوية
حول ضلعه الثابت α يسمى مخروطا ويرسم ضلع α مستويا محيطيا
أعني دائرة تسمى قاعدة المخروط ووتر α يرسم سطحه المحدب فنقطه α
تسمى رأس المخروط وخط α محور المخروط او ارتفاعه وخط α يسمى
ضلعا أو خطا واصلا

المقطع المنشأ عمودا على المحور ونحو β و γ دائرة و المقاطع المنشأة تبعا
للمحور ونحو مثلث α و β و γ التساوي السابقين فهو ضعف مثلث α الاصلى
٢ اذا طرح مخروط α و β من مخروط α و γ بمقطع يوازي

قاعدته فالجسم الباقي اعني $ح - ح$ ويسمى مخروطا ناقصا وهو ما يحصل من دوران شبه منحرف $ا - ح$ و القائم الزاويتين $ا$ و $د$ حول ضلع $ا د$ الثابت نخط $ا د$ المرقوم يسمى محور المخروط الناقص أو ارتفاعه ودائرته $د ح$ و $ح د$ تسمى قاعدتي المخروط الناقص ونخط $ح - ح$ يسمى ضلع المخروط

٤ الاسطوانتان $ا$ و $د$ المخروطان المتشابهان هما ما كانت النسبة بين محوريهما كالنسبة بين نصفي قاعدتيهما

٥ (شكل ٢٥٢) اذا رسم مستقيم الاضلاع $ا - ح - د$ داخل دائرة $ا د$ قاعدة الاسطوانة واقيم منشور قائم على تلك القاعدة بقدر ارتفاع الاسطوانة فيقال له المنشور المرسوم داخل الاسطوانة المرسومة على المنشور

وتحت ان حروف $ا$ و $د$ $ح - ح$ الخ من المنشور عند على مستوى القاعدة فهي منحصرة في السطح المحدب من الاسطوانة فلذا كان المنشور عاسا للاسطوانة بحروفه

٦ (شكل ٢٥٣) وايضا اذا رسم شكل $ا - ح - د$ مستقيم الاضلاع على قاعدة الاسطوانة واقيم منه منشور قائم بقدر ارتفاع الاسطوانة فيقال له المنشور المرسوم على الاسطوانة ويقال لها الاسطوانة المرسومة داخل المنشور

اذا كانت $م$ و $د$ الخ نقط تماس لاضلاع $ا - ح$ و $د - ح$ الخ واقيم من تلك النقط عمود $م - د$ الخ على مستوى القاعدة فهذه العمود توجد في سطح الاسطوانة وفي سطح المنشور المرسوم عليها معا فلذا كانت تلك الاعمدة خطوط تماس بينهما اعلم ان الاسطوانة والمخروط والكرة هي الاجسام المدورة الثلاث المتعارفة في اصول الهندسة

• (فوائد مقدمة على السطوح) •

القائدة ١

(شكل ٢٥٤) قطع $ع - ا - د$ المستوى المحدود بدور $ا - د$ اصغرمين

كل سطح سواء يكون محدوداً بشئ أو لا
وذلك لانخفاضه حيث انه من قبيل العلوم المتعارفة لانه يجري مجرى الخط
المستقيم بين سائر الخطوط من حيث انه أصغر من سد بين النقطتين فالسطوح
المستديرة على دور واحد أصغرهما ما كان مستويًا وانما تقلل العلوم المتعارفة
من خصائص علم الهندسة

وسند كراتيات هذه القضية بما كدوجه حتى لا يبقى الى السهم ثم مجال فتقول
السطح امتداد قدامت طولاً وعرضاً فلا يكون أكبر من سطح آخر الا اذا كانت
جميع اجزاء امتداده أكبر من اجزاء امتداد ما هو أكبر منه ومضى كان اجزاء
سطح أصغر من اجزاء الآخر من كل الوجوه فلا جرم انه يكون أصغر منه فاذا
مترجستوى ر ف و من أى جهة على ان يقطع السطح المستوى فى ر و
والاخرى ر ف و فلا يزال ر و المستقيم أصغر من خط ر ف و فلذا تبين
ان مستوى ر ف و أصغر من سطح ف ا ر و و ذى القبعات
القاعدة ٢

(شكل ٢٠٥) سطح ر ف و المذهب المحدود بدور ا ر و المحيط أصغر
من كل سطح آخر محدود به محيط
والمراد من المذهب ما لا يقطعه المستقيم الا فى نقطتين اثنتين فقط فكرر هذا وان
كان سبق ذكره انما يمكن تطبيق الخط المستقيم على سطح محدب فى بعض الجهات
كالم الانطباق وتلك الامثلة لا توجد الا فى الاسطوانة والمخروط والتسمية بالمذهب
لم تكن مخصوصة بالسطح المنحنى فقط بل تم سطوح كثيرة السطوح وما تر كبر من
سطوح مستوية وما كانت سطوحه أو بعض اجزائه سطحاً منحنياً والاخر
كثير السطوح

فاقول ان لم يكن سطح ر ف و أصغر من كل سطح يحيط به وكان الاصغر هو
سطح ف ا ر و وكان فى النهاية يساوى سطح ر ف و و مترجستوى على
ان لا يقطع سطح ر ف و بل يمس فى نقطة ٤ فقط فهذا المستوى يلاقى
مستوى ف ا ر و والقسم الذى فصل منه يكون أصغر من المستوى القاصِل

(قائمة ١) فيبقى ما بقى من سطح F اسود و يؤخذ المستوى الفاصل بدلا من
القسم المنفصل فالسطح الحاصل من الباقي والبديل لا يزال محيطا بسطح
 E اسود وأصغر من سطح F اسود ولقد افترض انه هو الاصغر من كل
ماعداء فالقرب باطل فلذا ثبت المطلوب من أن يكون سطح E اسود المذهب
أصغر من كل سطح محيط به مستند على دوره اسود أى محدودا به ومنتهيا اليه
• (تبيه) • (شكل ٢٥٦) وكذا تثبته بأدلة مشابهة لمثل هذا البرهان المرقوم
فنقول أولا اذا كان السطح المذهب محدودا بدورى اسود وهو السطح
الآخر محدودا به ما أيضا وكان محيطا فالحااط أصغرهما
ثانيا اذا كان سطح اس المذهب محيطا من كل جهة بسطح M الآخر
فالحااط أصغر سواء كان بينهما نقطة مشتركة أو خطوط أو سطوح أو لم يوجد لانه
لا يوجد هنا ما هو أصغر من الجميع سوى ما ذكر حيث يمكن رتبهم مستوى اس
بحسب لذلك المذهب في كل حال وهذا المستوى أصغر من سطح M (قائمة ١)
وحيث كان سطح M أصغر من سطح E وهذا بخلاف ان يقرب سطح
 M أصغر للجميع فقد بين ان سطح اس المذهب المحيط أصغر مما أحاط به
• (الدعوى الاولى النظرية) •

مساحة جسم الاسطوانة مساو لحاصل ضرب قاعدتها في الارتفاع
(شكل ٢٥٨) اذا كان اس نصف قطر قاعدة اسطوانة معلومة و ع
ارتفاعها وجعل لقطر سطح اس على السطح الدائرة التي نصف قطرها اس
فالمساحة الجسمية من الاسطوانة تكون سطح اس \times ع
لانه لو لم يكن سطح اس \times ع مساحة جسمية لها لكان مساحة الاسطوانة
أكبرا وأصغر منها • فنقول اولو افترض انه مساحة الاسطوانة اصغر منها
كالاسطوانة التي نصف قطر قاعدتها اس وارتفاعها ايضا ع وهم فوق
الدائرة التي نصف قطرها اس كثيرا الاضلاع و ع طرف المتكلم بحيث
لا تلتقي اضلاعه بجميعها الدائرة التي نصف قطرها اس (١٠٠ مقالة ٤) ثم تصور
ارتفاعه منشورا قائم قاعدته و ع طرف كثيرا الاضلاع وارتفاعه ع فهذا

المشور هو ما كان مرسوماً فوق الاسطوانة التي نصف قطر قاعدتها ρ ومساحتها الجسمية تساوي حاصل ضرب قاعدته ρ في ارتفاعه h (١٤ مقالة ٦) فالمساحة الجسمية من هذا المشور تكون أصغر من سطح $\rho \times h$ لتكون قاعدة ρ وطرف أصغر من الدائرة التي نصف قطرها ρ مع انحناء الارتفاع فيها لكن قد فرض ان سطح $\rho \times h$ مساحة للاسطوانة التي داخل المشور فعلى هذا الزم ان يكون المشور أصغر من الاسطوانة التي أحاط بها وهذا أكبر محال

لأن الاسطوانة مرسومة داخل المشور وهو محتو على ما لا يكون الا أكبر منها فاستحال ان يكون حاصل سطح $\rho \times h$ مساحة للاسطوانة التي نصف قطر قاعدتها ρ وارتفاعها h وعلى العموم واكد الوجه ان حاصل ضرب قاعدة الاسطوانة في ارتفاعها لا يمكن ان يكون مساحة جسمية لاسطوانة أصغر منها

ثانياً ان ذلك الحاصل عنه لا يكون مساحة لاسطوانة أكبر من تلك الاسطوانة أصلاً

لانه لو فرض ρ نصف قطر قاعدة الاسطوانة المعالومة اختراعا عن كثرة الاشكال وان لم يمكن جعل حاصل سطح $\rho \times h$ مساحة جسمية لاسطوانة أكبر منها ρ كالاسطوانة التي نصف قطر قاعدتها ρ وارتفاعها h ثم اجري العمل كما في الشق الاول فمساحة المشور المشكل فوق الاسطوانة المعالومة تكون $\rho \times h$ ومن كون شكل $\rho \times h$ طرف أكبر من الدائرة التي نصف قطرها ρ فالمساحة الجسمية من المشور تكون أكبر من حاصل سطح $\rho \times h$ وقد فرض مساحة للاسطوانة التي نصف قطر قاعدتها ρ وارتفاعها h فلزم ان يكون المشور أكبر من الاسطوانة التي أحاطت به وهو محال ولا يجرم انه أصغر منها ومن ثم تبين انه لا يمكن ان يكون حاصل ضرب قاعدة اسطوانة في ارتفاعها مساحة جسمية لاسطوانة أكبر منها والمعنى انه قد ثبت المطلوب من ان تكون المساحة الجسمية من الاسطوانة تساوي

من كل محدب المنشور رسم خارجها

(شكل ٢٥٢) لان الطول في محدب الاسطوانة ومحدب منشور $ا ر د ه و$ المرسوم داخلها واحد حيث ان المقاطع المشاة فيهما الموازية لحرف او مساوية له ولاجل تقدير عرضهما اقول اذا قطعنا بسطوح مستوية توازي مستوى القاعدة وتكون عمدا على حرف او فاحدهذين المقطعين يساوي محيط القاعدة والاخر يساوي دور كثير الاضلاع $ا ر د ه و$ وحيث ان عرض سطح الاسطوانة اكبر من عرض سطح المنشور مع اتحاد الطول فيهما تبين ان يكون السطح الاول اكبر من الثاني

(شكل ٢٥٣) وبمثل ما تقدم من الادلة والمبراهين يثبت ان يكون السطح المحدب من الاسطوانة اصغر من سطح محدب منشور $د ه و$ ل ح المرسوم خارجها
 «الدعوى الرابعة النظرية»

السطح المحدب من الاسطوانة مساو لمصل ضرب محيط قاعدتها في ارتفاعها (شكل ٢٥٨) اذا كان نصف قطر قاعدة الاسطوانة المقروضة $ا$ وارتفاعها $ع$ وجعل اقطر محيط $ا$ عمدا على محيط الدائرة التي نصف قطرها $ا$ لمساحة محدب الاسطوانة يكون محيط $ا$ $ع \times ا$

لانه ان لم يكن كذلك لزم ان يكون حاصل محيط $ا$ $ع \times ا$ مساحة لمحدب اسطوانة اكبر واصغر منها فنقول اولا اذا فرض انه مساحة لمحدب اسطوانة اصغر منها أي لمحدب الاسطوانة التي نصف قطر قاعدتها $د$ وارتفاعها ايضا $ع$ يرسم كثيرا الاضلاع المنتظم $د ح ط ف$ على الدائرة التي نصف قطرها $د$ بان لا يلتقي بالمحيط الذي نصف قطره $ا$ وبعد ذلك اذا تصور منشور قائم على ان تكون قاعدته $د ح ط ف$ وارتفاعه $ع$ فالمحدب منه يساوي حاصل ضرب دور $د ح ط ف$ في ارتفاع $ع$ (٢) وحيث كان هذا الدور اصغر من محيط $ا$ كان المحدب من المنشور اصغر من حاصل محيط $ا$ $ع \times ا$ ولكنه فرض مساحة لمحدب الاسطوانة التي نصف قطر قاعدتها $د$ ومن كون هذه الاسطوانة مرسومة داخل المنشور يلزم ان يكون محدب المنشور اصغر من محدب

الاسطوانة المرسومة داخله وهذا محال والحق بخلافه (٣) فلذا استحال ما قد
فرض وتبين ان حاصل ضرب محيط قاعدة الاسطوانة في ارتفاعها لا يكون
مساحة لمحدب اسطوانة اصغر منها

ثانيا ان عين هذا الحاصل المرقوم لا يكون مساحة لمحدب اسطوانة اكبر منها لانه
اذا فرض d نصف قطر لقاعدة الاسطوانة المعلومة اختصارا للافادة وقيل
ان حاصل محيط d \times ع مساحة لمحدب اسطوانة ارتفاعها ع ومحيط
قاعدتها اكبر من محيط القاعدة المقروضة مثلا لمحدب الاسطوانة التي نصف
قطر قاعدتها d واجرى العمل كما صرح به في الحال الاول فلا يزال محدب
المشهور مساويا لحاصل ضرب اطراف كثير الاضلاع d ع ط في ارتفاع ع
ولكون هذا الدور اكبر من محيط d يكون محدب المشهور اكبر من حاصل
محيط d \times ع وقد فرض هذا الحاصل مساحة لمحدب الاسطوانة التي نصف
قطر قاعدتها d فعلى هذا يلزم ان يكون محدب المشهور اكبر من محدب
الاسطوانة التي أحاطت به وهذا محال (٣) ومن اجل ذلك ظهر ان حاصل ضرب
محيط قاعدة اسطوانة في ارتفاعها لا يكون مساحة لمحدب اسطوانة اكبر منها
ومن ثمة ثبت المطلوب من ان يكون محدب الاسطوانة مساويا لحاصل ضرب محيط
قاعدتها في الارتفاع

• (الدعوى الخامسة النظرية) •

المساحة الجسمية من المخروط تساوي حاصل ضرب قاعدته في ثلث ارتفاعه
(شكل ٢٥٩) اذا كان سمع ارتفاع المخروط المعلوم و a ع نصف قطر
قاعدته وجعل نقطه سطح a ع على السطح قاعدته فمساحته الجسمية تساوي
حاصل ضرب سطح a ع $\times \frac{1}{3}$ سمع

فنفقولا وان قبل ان حاصل سطح a ع $\times \frac{1}{3}$ سمع مساحة مخروط اكبر
مثلا للمخروط الذي نصف قطر قاعدته ع - الاكبر من a ع مع دوام بقاء ارتفاع
سمع ورسم على الدائرة التي نصف قطرها a ع كثيرا الاضلاع m ف ط
المنتظم على أن لا يلتقي بالمحيط الذي نصف قطره ع - (١٠ مقالة ٤) ثم يرسم

هرم يكون المنتظم المرقوم قاعدته ورأسه واقعة أيضا في نقطة منه فالمساحة
الجسمية لهذا الهرم تساوي حاصل ضرب مساحة كثير الاضلاع م د ف ط
في ثلث ارتفاعه س ع (١٩ مقالة ٦) لكن حيث ان كثير الاضلاع المرقوم اكبر
من سطح الدائرة المرسومة داخله المتساوي لها ب سطح ع ا علم ان الهرم اكبر
من حاصل سطح ا ع $\times \frac{1}{3}$ س ع وقد فرض هذا المقدار مساحة للخروط
الذي رأسه منه ونصف قطر قاعدته ع ر وهو ما كان مشتقاً على الهرم
المذكور وهذا محال ان يكون المحوى اكبر على جواه والحق بخلافه
ومن ثمة لا يكون حاصل ضرب القاعدة في ثلث الارتفاع مساحة لجسم مخروط
اكبر وهو مقروض

ثانياً ان الحاصل المرقوم لا يكون مساحة لجسم مخروط اصغر منه ولثلاث تغيير
الشكل يجعل ع ر نصف قطر قاعدة المخروط المقروض فان قيل انه يمكن
ان يكون حاصل سطح ع ر $\times \frac{1}{3}$ س ع مساحة للخروط الذي نصف قطر
قاعدته ع ا فيجوز العمل كما صرح به في الشق الاول لحاصل ضرب مساحة
م د ف ط السطحية في ثلث س ع هو المساحة الجسمية للهرم س م د ف ط
لكن مساحة م د ف ط اصغر من سطح ع ر فعلم ان مساحة جسم الهرم
اصغر من حاصل سطح ع ر $\times \frac{1}{3}$ س ع الذي فرض انه مساحة للخروط
الذي نصف قطر قاعدته ا ع وارتفاعه س ع فلزم ان يكون الهرم اصغر
من المخروط الكائن داخله وهذا محال والحق بخلافه

فتبين ان حاصل ضرب مساحة قاعدة مخروط في ثلث ارتفاعه لا يكون مساحة
لمخروط اصغر منه كما لا يخفى ومن أجل ذلك ظهر ان مساحة قاعدة المخروط
مضروبة في ثلث ارتفاعه لا تكون مساحة لجسم مخروط اكبر منه بل انه مساحة
ذاته وثبت المطلوب

نتيجة المخروط ثلث الاسطوانة التي اتحد بها قاعدة وارتفاعها ومن هذا نتج ما سبق
اولاً ان النسبة بين المخاريط المتساوية الارتفاع كالنسبة بين قواعدها
وثانياً ان النسبة بين المخاريط المتساوية للقواعد كالنسبة بين ارتفاعاتها

والثالثان النسبة بين المخاريط المتشابهة كالنسبة بين مكعبات اقطار قواعدها
وكالنسبة بين مكعبات ارتفاعاتها

تبيينه اذا كان نصف قطر قاعدة مخروط و h ارتفاعه مساحة جسمه تكون $\pi r^2 \times \frac{1}{3} h$ أو $\frac{1}{3} \pi r^2 h$

• (الدعوى السادسة النظرية) •

(شكل ٢٦) اذا كان α و β نصفى قطرى قاعدتى مخروط اهرى ناقص و α ارتفاعه احاطه جسمه $\frac{1}{3} \pi \times \alpha \times \beta$

فإذا كان ط و د ح هـ م امتثلت بايكافئ مخروط سم ا ب ان تكون قاعدة
 و د ح مقاومة لقاعدة المخروط مع تساوى الارتفاع فيسما و امكن فرض كون
 قاعدة م هـ م موضوعتين على قسمة واحد تساوى ابعاد رؤسهما سم و ط من
 مستوى القاعدة فإذا مدمستوى هـ ف و حدث مقطع ع ك ل في الهرم
 فهذا المقطع يكافئ قاعدة د هـ لان النسبة بين قاعدة ا ب و د هـ كالنسبة
 بين مربعى ا ب و د ف نصف قطرهما (١١ مقالة) أو كالنسبة بين مربعى سم ع
 و سم ف ارتفاعهما فكانت نسبة مثلثى و د ح و ع ك ل كالنسبة بين
 مربعى الارتفاعين المرقومين (١٥ مقالة ٦) وبهذا تكون النسبة بين دائرتى
 ا ب و د هـ كنسبة مثلثى و د ح و ع ك ل لكن قد فرض التكافؤ بين مثلث
 و د ح و دائرة ا ب فمثلا ع ك ل ايضا يكافئ دائرة د هـ ومن المعلوم
 ان المساحة الجسمية للهرم تكافئ مساحة المخروط وذلك لتكافؤ القواعد فهما
 لان المساحة الجسمية من مخروط سم ا ب هي حاصل ضرب قاعدة ا ب في مقدار
 $\frac{1}{3}$ سم ع والمساحة الجسمية من هرم ط و د ح هي حاصل ضرب قاعدة
 و د ح في مقدار $\frac{1}{3}$ سم ف وبمثل هذا ثبت ان يكون هرم ط ع ك ل مكافئا
 لمخروط سم د هـ فصار جسيم مخروط ا د هـ ناقص مكافئا لجسم هرم
 و د ح ع ك ل الناقص الآخر لكن قاعدة و د ح تكافئ الدائرة ا ب
 نصف قطرها ا ب ومساحتها ط \times ا ب وكذلك تصير قاعدة ع ك ل =

ط \times د ف $\frac{1}{2}$ ولما كان مقدار ط \times ا ع \times د ف وسطا متناسبا بين
مقدارى ط \times ا ع و ط \times د ف كانت المساحة المربعة للهرم
أو المخروط الناقص $\frac{1}{3}$ ع ف \times (ط \times ا ع + ط \times د ف + ط \times د ف)
 \times ا ع \times د ف (٢١ مقالة ٦) اعنى $\frac{1}{3}$ ط \times ف ع \times (ا ع + د ف + د ف)
ا ع \times د ف وهو عين ما تقدم

(الدعوى السابعة النظرية)

السطح المحدب من المخروط مساو لحاصل ضرب محيط قاعدته في نصف ضلعه
أى في نصف الخط الواصل

(شكل ٢٥٩) اذا كان ا ع نصف قطر قاعدة المخروط و م رأسه و م د

ضلعه فسطحه المحدب يصير محيط ا ع \times $\frac{1}{2}$ م د

لانه لو قيل انه يمكن ان يكون ذلك مساحة لسطح المخروط الذى رأسه أيضا
في نقطة م ونصف قطر قاعدته أكبر من ع ا لمحور ع - و م م د ف ط
كثيرا الاضلاع المنتظم على الدائرة الصغيرة وهو لا يلاقى المحيط الذى نصف قطره
ع - يحدث هرم م م د ف ط المنتظم بان يكون كثيرا الاضلاع المذكور
قاعدته ونقطة م رأسه فمساحة مثلث م م د أحد المثلثات التى
يتركب منها محدب الهرم هى حاصل ضرب قاعدة م د في نصف ارتفاع م د
وهو ضلع المخروط المقروض وهذا الارتفاع مساو لما في م د ف و م د ف ك
الى آخر سائر المثلثات الاخر من ارتفاع ف ط ه ان تكون مساحة محدب الهرم
مساوية لحاصل ضرب دور م د ف ط م في مقدار $\frac{1}{2}$ م د ف فضاير محدب
الهرم المذكور أكبر من حاصل ضرب محيط ع ا \times $\frac{1}{2}$ م د ف حيث كان
دور م د ف ط م أكبر من محيط ا ع فلزم ان يكون أكبر من محدب المخروط
الذى رأسه م ونصف قطر قاعدته ع - وهذا مستحيل لانه لو صار تطبيق
لهذا الهرم على هرم يساويه وهذا المخروط على مخروط يساويه القاعدتان للقاعد

سـ و لوجود المشابهة ايضا بين مثلثي سـ ا د و سـ ر ج يصير ا د : ر ج :: سـ ا : سـ ر و لتنابه النسب يصير ا د : ر ج :: ا ر : د ر أو :: محيط ا ر : محيط د ر (١١ مقالة) ومن كون ا د = محيط ا ر بالمعل يصير ر ج = محيط د ر اذا علمت ذلك فقد ا د $\times \frac{1}{4}$ سـ ا يكون مساحة مثلث سـ ا د ومساويا لسطح مخروط سـ ا ر الذي كلن مقدار مساحته محيط ا ر $\times \frac{1}{4}$ سـ ا وكذلك ثبت ان يكون مثلث سـ ر ج مساويا لسطح مخروط سـ ر د فلذا يكون سطح مخروط ا د هـ الناقص مساويا لسطح ا د حـ و شبه المخرف وحيث كانت مساحة شبه المخرف ا د $\times (\frac{1}{4} + ر ج)$ ثبت المطلوب من ان يكون سطح مخروط ا د هـ الناقص مساويا لحاصل ضرب ضلع ا د في نصف مجموع محيطي قاعدتيه

نتيجة اذا قسم ط كل من نقطة ط وسط ضلع ا د موازيا لخط ا ر و ط م موازيا لخط ا د فعلى ما صرح به آنفا ثبت ان يكون ط م = محيط ط ك لكن من كون شبهه متخرف ا د حـ و = ا د \times ط م = ا د \times محيط ط ك يجب ان يكون السطح المحدب من المخروط الناقص مساويا لحاصل ضرب ضلعه في محيط المقطع المشابه لتساوي الابعاد بين قاعدتيه وبذلك يمكن التعبير عنه

تنبيه اذا ادبر خط ا د الموضوع في احد طرفي ر ج الموجود في مستوي به حول الخط المرقوم مرة واحدة فمساحة السطح الحاصل من دوران ذلك الخط يكون ا د \times محيط ا ر + محيط د ر أو ا د \times محيط ط ك

وحيث ان خطوط ا ر و د و ط ك تكون عمادا نازلة من نهايتي خط ا د ووسطه على محور ر ج لانه اذا مد خط ا د و ر ج حتى التقيا في نقطة سـ فلا جرم ان السطح المردوم بخط ا د هو سطح المخروط الناقص الذي كان ر ا و د نصف قطري قاعدتيه ووجود رأس المخروط الكامل في نقطة سـ غير خفي وهذا السطح هو المساحة التي سبق ذكرها

واما اذا وقعت نقطة د على نقطة سـ وحدث مخروط مكامل أو انشأ

اسطوانة بجعل خط $او$ موازيا للعمود فلا تزال المساحة كما تقدم لكن في الحال الاولى ينعدم $دو$ احلا وفي الحال الثانية يصير مساويا لخط $اع$ وتلظ ط $ك$ أيضا

• (الدعوى التاسعة القائدة) •

(شكل ٢٦٢) اذا كان $ا$ - و $د$ و $د$ اضلاعات متواليين من كثير اضلاع منتظم و $ع$ مركز و $ع$ نصف قطر الدائرة المرسومة داخله وفرض تدوير $ا$ - $د$ قسم كثير الاضلاع الموضوع في أحد طرفي قطر $ودا$ مرة واحدة حوله فالمساحة السطحية الحاصلة من دورانه تكون $م$ $ن$ $خ$ محيط $ع$ و ارتفاع هذا السطح هو $م$ $ن$ اعني القسم المحصور من المحورين عمودي $ام$ و $ون$

فاذا كانت نقطة $ع$ وسط ضلع $ا$ - وكان $ك$ هو العمود النازل من نقطة $ع$ على المحور فمساحة السطح المرسوم بضلع $ا$ - تكون $ا$ - $خ$ محيط $ك$ (٨) ويرسم $ا$ - موازيا للعمود ولوجود المشابهة في مثلثي $ا$ - $ر$ و $ع$ $ك$ لتعامد اضلاعهما على وجه التناظر اعني ان $ع$ $د$ عمود على $ا$ - و $ك$ على $ا$ - و $ع$ $ك$ على $ر$ - نصير $ا$ - : $ا$ - $أ$ و $م$:: $ع$: $ك$ أو :: محيط $ع$: محيط $ك$ فلذا صار $ا$ - $خ$ محيط $ك$ = $م$ $ن$ $خ$ محيط $ع$ فعلم ان مساحة السطح المرسوم بضلع $ا$ - تساوي حاصل ضرب ارتفاعه $م$ $ن$ في محيط الدائرة المرسومة داخله

وكذلك السطح المرسوم بضلع $د$ - يكون = $ن$ $ف$ $خ$ محيط $ع$ والمرسوم بضلع $د$ - = $ن$ $ف$ $خ$ محيط $ع$ فصارت مساحة السطح الحاصل بدوران قسم كثير الاضلاع $ا$ - $د$ هكذا (م) $ن$ $ف$ + $ن$ $ف$ + $ن$ $ف$ $خ$ محيط $ع$ أو $م$ $ن$ $خ$ محيط $ع$ وبذلك يثبت المطلوب من ان تكون مساحة السطح المرسوم بذلك القسم هي حاصل ضرب ارتفاعه في محيط الدائرة المرسومة داخله

مقابلة اذا كان كثير الاضلاع المنتظم كاملا وعددا ضلعه زويا ومحور و د مارا
برأس و د و د المتقابلين فالسطح المرسوم يتدوير و ا د نصف كثير
الاضلاع حول المحور المرسوم يساوي حاصل ضرب محور و د في محيط الدائرة
المرسومة داخله وحينئذ يدور محور و د قطرا للدائرة المرسومة فوقه

• (الدعوى العاشرة النظرية) •

سطح الكرة يساوي حاصل ضرب قطرها في محيط دائرة عظيمة من دوائرها
بيان ذلك اولا ان حاصل ضرب قطر الكرة في محيط دائرة عظيمة لا يكون مساحة
لسطح كرة اكبر منها

(شكل ٢٦٣) لانه لو قيل انه يمكن ان يكون ا ب محيط ا د مساحة للكرة
التي نصف قطرها د و رسم كثير اضلاع منتظم عدد اضلعه زوج على الدائرة
التي نصف قطرها د بحيث لا يلاقى محيط الدائرة التي نصف قطرها د
كانت نقطتا م و م رأسين متقابلين في كثير الاضلاع فاذا دور م م
نصف كثير الاضلاع حول قطر م م مساحة السطح الحادث من دورانه
تكون م م م محيط ا د (٩) لكن من حيث ان خط م م م أكبر من
قطر ا ب فالسطح المرسوم بكثير الاضلاع يكون أكبر من حاصل ا ب م محيط
ا د فلزم ان يكون أكبر من سطح الكرة التي نصف قطرها د وهذا خلف لان
سطح الكرة أكبر من السطح المرسوم بكثير الاضلاع لان سطح الكرة أحاط به
من كل جانب واشقل عليه فثبت ان حاصل ضرب قطر الكرة في محيط دائرتها
العظيمة لا يمكن ان يكون مساحة لسطح كرة اكبر منها

وثانيا ان ذلك الحاصل لا يكون مساحة لسطح كرة اصغر منها فلو قيل انه يمكن
ان يكون حاصل د ه م محيط د ه مساحة سطح الكرة التي نصف قطرها
د ا وأجرى العمل كما سبق في الحالة الاولى لا يزال سطح الجسم الناتج من كثير
الاضلاع مساويا لحاصل م م م محيط د ا لكن من حيث ان خط م م م
اصغر من قطر د ه ومحيط ا د أيضا اصغر من محيط د ه بصير هذا ان
برهاتين على ان يكون سطح الجسم المرسوم بكثير الاضلاع اصغر من حاصل د ه

× محيط γ ولاجل هذا الزم ان يكون أصغر من سطح الكرة التي نصف قطرها α
وهذا محال لان كثير الاضلاع سطحه احاط بالكرة من كل جانب فكان السطح
المرسوم بكثير الاضلاع اكبر من سطح الكرة ومن غة تبين انه لا يمكن ان يكون
حاصل ضرب قطر الكرة التي نصف قطرها α في محيط دائرتها العظيمة مساحة
لسطح كرة أصغر منها وبهذا ثبت المطلوب من ان تكون مساحة سطح الكرة
مساوية لحاصل ضرب قطرها في محيط دائرة عظيمة من دوائرها

نتيجة حيث كانت مساحة سطح الدائرة العظيمة مساوية لحاصل ضرب محيطها
في نصف نصف القطر اربع القطر فكانت مساحة سطح الكرة قدر أربعة
أمثال سطح الدائرة العظيمة

تنبيه حيث تعين سطح الكرة بالسطوح المستوية يكون تعيين القيمة المطلقة من
الشقوق والمثلثات الكروية سهلا ونسبة كل منها الى سطح الكرة الكامل على
ما سياتي

بيان ذلك اولاً ان الشقة التي زاويتها α نسبتها الى سطح الكرة كنسبة زاوية
 α الى أربع قوائم (٢٠ مقالة ٧) أو كنسبة القوس العظيم الذي هو مقدار
زاوية α الى محيط الدائرة العظيمة لكن حيث ان مساحة سطح الكرة مساوية
لحاصل ضرب قطرها في محيط دائرتها العظيمة فمساحة سطح الشقة يساوي حاصل
ضرب القوس الذي هو مقدار زاوية الشقة في قطر الكرة

وثانياً مساحة سطح كل مثلث كروي تكافئ الشقة التي زاويتها تساوي نصف
التفاضل بين القائتين وبين مجموع الزوايا الثلاث من ذلك المثلث (٢٣ مقالة ٧)
مثلاً اذا كان α و β و γ الاقواس العظام التي هي مقادير الزوايا الثلاث من
المثلث و μ محيط دائرة عظيمة وقطرها فالمثلث الكروي يكافئ الشقة التي مقدار
زاويتها $\alpha + \beta + \gamma - \frac{1}{2}\mu$ فلذا صارت مساحتها $\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma - \frac{1}{2}\mu) \times \mu$

وكذلك المثلث القائم الزوايا الثلاث كل من أقواسه α و β و γ الثلاثة يساوي
مقدار $\frac{1}{2}\mu$ ومجموعها يساوي $\frac{3}{2}\mu$ وحيث ان تفاضل هذا المقدار
ونصف μ هو $\frac{1}{2}\mu$ يكون نصف هذه الفضلة $= \frac{1}{4}\mu$ ومن أجل هذا

كانت مساحة المثلث القائم الزوايا الثلاث $= \frac{1}{8} م \times ق$ وهو ثمن سطح الكرة

واما سطح كثير الاضلاع الكروي فيتبع المثلث من غير واسطة فضلا عن تعيين مساحته كما في الدعوى الرابعة والعشرين من المقالة السابعة حيث كان المثلث القائم الزوايا الثلاث هناك احدا للمساحة والاّن جعل على نسق المستوى

• (الدعوى الحادية عشرة النظرية) •

سطح منطقة الكرة ممبا والحاصل ضرب ارتفاعها في محيط دائرة عظيمة (شكل ٢٦٩) فإذا كان هو قوسا كبيرا أصغر من ربع المحيط و هو العمود النازل على نصف قطر هو ه فمساحة المنطقة ذات القاعدة المرسومة بتدوير قوس هو حول ه تكون هو هـ محيط هو هـ

بيان ذلك أولاً أنه اذا فرض ان مقدار مساحة هذه المنطقة أصغر من ممسلا بان قبل انه لا يمكن ان يكون حاصل هـ هـ محيط هـ ا مساحة لها وهم جزء كبير الاضلاع هـ م وترع ف داخل قوس هو على أن لا يلاقى المحيط الذي نصف قطره هـ ا وانزل عمود هـ على هـ م يكون هـ هـ محيط هـ هـ مقدار مساحة السطح الحادث من تدوير كثير الاضلاع هـ م و حول هـ هـ (٩) وحيث ان هذا المقدار أكبر من مقدار هـ هـ محيط هـ ا وقد فرض انه مساحة للمنطقة المرسومة بقوس هو لزم ان يكون السطح المرسوم بكثير الاضلاع هـ م وترع ف أكبر من السطح المرسوم فوقه بقوس هو وهذا محال لان السطح الاخير اخطا بالسطح الاول من كل جهة فهو أكبر منه فومن ثمة علم ان مساحة كل منطقة ذات قاعدة واحدة لا تكون أصغر من حاصل ضرب ارتفاع تلك المنطقة في محيط الدائرة العظيمة

لأنما ان مساحة تلك المنطقة لا تكون أيضا أكبر من حاصل ضرب ارتفاعها بمحيط الدائرة العظيمة فبفرض انها المرسومة بدوران قوس اـ حول اـ وانه يمكن ان تكون منطقة اـ هـ حاصل اـ هـ محيط اـ هـ فاقول سطح

الكرة الكامل مركب من منطقتي $ا$ و $ب$ ومساحته $ا ب \times محيط$
 $ا$ (١٠) أو $ا ب \times محيط ا + ب \times محيط ا$ فإذا كانت
 منطقة $ا < ب$ $ا ب \times محيط ا$ نظر التعادل يلزم أن تكون منطقة
 $ب > ا$ $ب \times محيط ا$ وهذا محال كما صرح به في الضرب الأول من
 هذه الدعوى فوضح أن مساحة المنطقة ذات القاعدة لا تكون أكبر من حاصل
 ضرب ارتفاعها بمحيط دائرة عظيمة

والعنى أنه قد تبين أن مساحة كل منطقة ذات قاعدة واحدة تساوى حاصل
 ضرب ارتفاعها في محيط الدائرة العظيمة

(شكل ٢٢٠) وأما المنطقة ذات القاعدتين فتتألف من المنطقة المفروضة
 أنها الحادثة من تدوير قوس $و ح$ حول قطر $د ه$ وانزل عمودا $و ع$ و $ح ك$
 فلاجرم أن المنطقة المرسومة بقوس $و ح$ هي التفاضل بين المنطقتين المرسومتين
 بقوسى $د و$ و $د ح$ وحيث أن مساحتهما $د ك \times محيط د$ و $د ح \times محيط$
 $محيط د$ فكانت مساحتها $(د ك - د ح) \times محيط د$ أو $ع ك$
 $\times محيط د$ ومن ثمة ثبت المطلوب على آكد وجه من أن تكون مساحة
 كل منطقة تساوى حاصل ضرب ارتفاعها في محيط الدائرة العظيمة سواء كانت
 ذات قاعدة واحدة أو ذات قاعدتين

تنبيه نسبة المنطقتين المصبتين على كرة واحدة أو كرات متساوية كنسبة ارتفاعها
 ونسبة المنطقة إلى سطح الكرة كنسبة ارتفاع تلك المنطقة إلى القطر
 * (الدعوى الثانية عشرة النظرية) *

(شكل ٢٦٤ و ٢٦٥) مثل $ا ب$ ومستطيل $ب د$ هو التعدد القاعدة
 والارتفاع إذا ادبرنا حول قاعدة $ب د$ المشتركة فالجسم الحادث من
 دوران الثلاث يكون ثلث الاسطوانة الحاصلة من دوران المستطيل

(شكل ٢٦٤) إذا انزل عمودا $ا ب$ على المحور فالخروط المرسوم بمثل $ا ب د$
 ثلث الاسطوانة المرسومة بمستطيل $ا ب د$ وكذلك الخروط المرسوم
 بمثل $ا ب د$ ثلث الاسطوانة المرسومة بمستطيل $ا ب د$ ه فظهر أن مجموع

المخروطين أو الجسم المرسوم بمثلث $ا-ر$ يصكون ثلث مجموع الاسطوانتين
أو الجسم المرسوم بمستطيل $ر-هـو$

(شكل ٢٦٥) وإذا وقع محور $ا$ خارج المثلث فالجسم المرسوم بمثلث $ا-ر$
هو التفاضل بين المخروطين المرسومين بمثلثي $ا-ر$ و $ا-د$ وحيث قد تكون
الاسطوانة المرسومة بمستطيل $ر-هـو$ تفاضل الاسطوانتين المرسومتين
بمستطيلي $ا-ر$ و $ا-هـو$ فلذا علم انه لا يزال الجسم الحادث من دوران
المثلث ثلث الاسطوانة الحادثة من دوران المستطيل المصدين قاعدة وارتفاعها
وثبت المطلوب

ففيه مساحة سطح الدائرة التي نصف قطرها $ا$ هي $ط \times \frac{ر}{٢}$ فالحاصل $ط$
 $\times \frac{ر}{٢} \times ر$ يكون مساحة جسم الاسطوانة المرسومة بمستطيل
 $ر-هـو$ و $\frac{١}{٣} ط \times \frac{ر}{٢} \times ر$ مساحة لجسم المرسوم بمثلث $ا-ر$
(الدعوى الثالثة عشرة العملية) *

(شكل ٢٦٦) طريق استخراج مساحة الجسم الحاصل من دوران مثلث
 $ا-د$ على رأسه $ر$ حول خط $د$ المرسوم كيفما كان خارجا عن ذلك
المثلث

فيمتد ضلع $ا-ر$ حتى يلاقى محور $د$ في نقطة $د$ وينزل عمودا $ام-د$
من نقطة $ا-و$ على المحور

فالجسم المرسوم بمثلث $ا-د$ يكون $\frac{١}{٣} ط \times \frac{ر}{٢} \times د$ (١٢) والجسم
المرسوم بمثلث $د-ر$ يكون $\frac{١}{٣} ط \times \frac{ر}{٢} \times د$ فتفاضل هذين
الجسمين أو الجسم المرسوم بمثلث $ا-ر$ يكون $\frac{١}{٣} ط \times (\frac{ر}{٢} - \frac{ر}{٢})$
 $\times د$ وقد يمكن التعبير عن ذلك بصورة أخرى فاقول إذا أنزل عمود $د$ على
 $د$ من نقطة $د$ وسط $ا-ر$ ورسم $د-ع$ من نقطة $د$ موازيا لخط $د$

فتیور ام + ز = ۲۰۰ (۷۴۱۰۰) و جستان ام = ۵ = ۱۰

فإذا صار $(a+m)(a-m) \times (a-m) = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ أو $a^2 = \frac{a^2}{2}$ \times اع

(١٠ مقالة ٣) فتخصر مساحة ذلك الجسم في تعبير $\frac{2}{3} \times ط \times ع \times ا$

x دو لیکن اذا انزل عود وف علی ار فشاہ مثلثی ارع

وهدف يتاقى منه هذا التناسب اع : حرف :: اس : هو ولذا يصير

اع \times دو = وف \times ا- ومن کون حاصل وف \times ا- ضعف

ملاحظة ١- و أيضا x و تساوي ٢ - و من ثمة كان

الجسم المرسوم بمثلث α في ط \times ا- $\beta \times$ عي او عين ذلك α - β

$x \cdot \frac{1}{x} = 1$ (دیکھنا کہ $\frac{1}{x} = x^{-1}$ ہے)

ثمة المحيط الذي هو نقطة وسط قاعدة

(نقشه) (شکل ۲۶۷) اذا كان ضلع $a = 7$

ار مساحت مثلث ا-ب تساوی حاصل ا-ب $\times \frac{1}{2}$ و مساحت

الجمعة $\frac{4}{7}$ ط $x - 1 - x = 0$ ق تول الى $\frac{2}{7}$ ط $x - 1 - x = 0$ ق

x ٢٠ وجود التشابه بين مثلتي ا-ع و ٢٠ يتفق هذا التناسب

ا- : س ع ا و م ه :: ع : ع و م ن ه ا ص ا ر ا - x ع

$\text{م} \times \text{ع} = \text{فتين ان مساحة الجسم المرسوم بمثلث ا-و المتساوي}$

اساقین نکلون $\frac{r}{p} \times 2 \times \frac{r}{p}$

نبيه حل هذا المطلب يوم انه مبني على كون ضا

لكن اذا كان خط ١ - المرقوم وازي بالمعروف فبالتبع منها لا يزال كذلك

(شكل ٢٦٨) وأما المساحة الجسمية للأسطوانة المرسومة بمسقطين أم ٢-

هو ط \times أم \times م \times مساحة الجسم المرسوم منك احم فهو $\frac{1}{2} \times$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

٢٨٢ / كتاب في رسم الحروف المرسوم في - كتاب في رسم الحروف المرسوم في - كتاب في رسم الحروف المرسوم في

فإذا جمع الجسمان الاولان وحذف الثالث يبقى ط \times أم \times (م) \times $\frac{1}{4}$ م
 $-\frac{1}{4}$ م) وهو مساحة جسم مثلث ار م ومن كون م $-\frac{1}{4}$ م =
 م يجرى ذلك القدر مجرى ط \times أم \times $\frac{1}{4}$ م او $\frac{1}{4}$ ط \times م \times م
 ويختصر فيه ولا جرم ان هذا موافق لتناج ما تقدم

• (الدعوى الرابعة عشرة النظرية) •

(شكل ١٦٢) اذا كانت ار و م و د المتعددة المتوالية اضلاعاً كبير
 اضلاع منتظم و ع مركزه و ع نصف قطر الدائرة المرسومة داخله وتصور
 تدوير ار و قطاع كثيراً الاضلاع الموضوع في احد طرفي قطر ود حوله
 فمساحة الجسم الحاصل من دورانه تكون $\frac{1}{4}$ ط \times ع \times م و م هو
 جرم المهور المحدود بنهايي هودي ام و د و لا انتظام كثيراً الاضلاع كانت
 كافة مثلثات ار م و ع الخ متساوية ومتساوية الساقين فعلى
 ما صرح به في تقييد الدعوى المقدمة صارت مساحة الجسم الحاصل من دوران
 مثلث ار م المتساوي الساقين $\frac{1}{4}$ ط \times ع \times م و مساحة الجسم
 المرسوم بمثلث ار م $\frac{1}{4}$ ط \times ع \times م و ايضا مساحة الجسم المرسوم
 بمثلث م د $\frac{1}{4}$ ط \times ع \times م فلذا صار مجموع هذه الاجسام اعنى مساحة
 الجسم المرسوم بشكل ار د قطاع كثيراً الاضلاع $\frac{1}{4}$ ط \times ع \times م +

(م) \times م و ثبت المطلوب

• (الدعوى الخامسة عشرة النظرية) •

كافة القطاع الكروية مساحتها الجسمية تساوى حاصل ضرب المنطقة التي
 تكون قاعدة الهاء في ثلث نصف القطر والمساحة الجسمية من الكرة الكاملة
 تساوى حاصل ضرب سطحها المستدير في ثلث نصف قطرها

(شكل ٢٦٩) حيث يرسم القطاع الكروي بدوران $ا-د$ قطاع الدائرة حول $ا$ ومساحة المنطقة المرسومة بقوس $ا-د$ هي $ا د \times$ محيط $ا د$ او $٢ ط \times ا د \times ا د$ (١١) فمساحة جسم القطاع الكروي مساوية لمماس ضرب هذه المنطقة في $\frac{1}{3}$ ا د اعني $\frac{2}{3} ط \times ا د \times ا د$

اولا ان قيل انه يمكن ان يفرض مقدار $\frac{2}{3} ط \times ا د \times ا د$ مساحة جسم قطاع كروي اكبر منه مثلا اذا فرض مساحة لجسم القطاع الكروي المرسوم بشكل $ه د و$ قطاع الدائرة المشابه لقطاع $ا-د$ فيرسم جزء كثيرا لاضلاع $ه د و$ المنتظم داخل قوس $ه د$ و اضلاعه لا تلاقى قوس $ا-د$ ثم اذا تصور دوران $ه د و$ قطاع كثيرا لاضلاع $ه د و$ قطاع الدائرة في آن واحد حول $ه د$ وكان $د-ه$ نصف قطر الدائرة المرسومة داخل كثيرا لاضلاع وكان $د و$ هوذا نازل على $ه د$ فالجسم المرسوم بقطاع كثيرا لاضلاع تكون مساحته $\frac{2}{3} ط \times ا د$ $د-ه د$ (١٤) فيكون بعد $د-ه$ اكبر من $ا د$ بالعمل $ه د$ ايضا اكبر من $ا د$ لانه اذا وصل $ا-د$ وهو قائمتان الحادتان $ه د و$ و $ا-د$ يكونان متشابهين فنذلك يحصل هذا تناسب $ه د : ا د :: د و : د-ه$ $د-ه :: د و : د-ه$ فظهر ان يكون $ه د < ا د$

وعلى مقتضى هذه الادلة المذكورة يكون حاصل $\frac{2}{3} ط \times ا د \times ا د$ هو اكبر من حاصل $\frac{2}{3} ط \times ا د \times ا د$ او فالجسم الاول هو الجسم المرسوم بقطاع كثيرا لاضلاع والثاني هو الجسم بقطاع الدائرة $ه د و$ وهو المقروض مساحة لجسم القطاع الكروي فلذا لزم ان يكون الجسم المرسوم بقطاع كثيرا لاضلاع اكبر مما كان مرسوما بقطاع الدائرة وهذا محال حيث كان ذلك الجسم محويا داخل القطاع الكروي فهو اصغر منه ومن ثمة تبين استحالة ان يكون حاصل ضرب المنطقة التي هي قاعدة القطاع الكروي في ثلث القطر مساحة لجسم قطاع كروي اكبر منه

ثانيا لا يمكن ان يكون ذلك القدر مساحة جسم قطاع كروي دون ذلك • لانه اذا
كان القطاع الكروي المعلوم حاصل من دوران $\frac{r}{2}$ هو قطاع الدائرة وفرض
امكان كون حاصل $\frac{r}{2}$ ط $\times \frac{r}{2}$ هـ مساحة جسم قطاع كروي اصغر منه
مثلا اذا كان مساحة جسم القطاع الكروي الناشئ عن دوران $\frac{r}{2}$ - قطاع
الدائرة فاقول يبقى العمل المتقدم على حالة فلا يزال مساحة الجسم المرسوم بقطاع
كثير الاضلاع $\frac{r}{2}$ ط $\times \frac{r}{2}$ هـ لكن بعد $\frac{r}{2}$ اصغر من $\frac{r}{2}$ هـ فلذا
صار مساحة الجسم المرسوم اصغر من حاصل $\frac{r}{2}$ ط $\times \frac{r}{2}$ هـ وهو ما فرض
مساحة لقطاع الكروي المرسوم بقطاع الدائرة $\frac{r}{2}$ - فعلى هذا لازم ان يكون
الجسم المرسوم بقطاع كثير الاضلاع اصغر من جسم القطاع الكروي المرسوم
بقطاع $\frac{r}{2}$ - وهذا كبر محال • حيث كان القطاع الكروي محويا في الجسم
المرسوم ومن غمظ ان حاصل ضرب منطقة القطاع الكروي في ثلث نصف القطر
لا يكون مساحة ايضا لجسم قطاع كروي اصغر من المقروض
والحاصل ان مساحة جسم كافة القطاعات الكروية تساوي حاصل ضرب المنطقة
التي تكون قاعدة لها في ثلث نصف القطر

واما اذا عظم $\frac{r}{2}$ - قطاع الدائرة حتى بلغ مقبدا نصفها فالقطاع المرسوم
بدورانه يصير كرة كاملة فعلى ما صرح به في هذه الدعوى يثبت المطلوب من ان
تكون مساحة جسم الكرة مساوية لحاصل ضرب مساحة سطحها المستدير
في ثلث نصف قطرها

نتيجة حيث ان نسبة سطوح الكرات كنسبة مربعات انصاف اقطارها كانت
نسبة حواصل ضرب هذه السطوح في نصف القطر كنسبة مكعبات انصاف
اقطارها فصار النسبة بين جمعي الكرتين كالنسبة بين مكعب نصف قطريهما
او كنسبة مكعب قطريهما

• (تبيينه) • اذا كان $\frac{r}{2}$ نصف قطر كرة فسطحها المستدير $\frac{r}{2}$ ط $\times \frac{r}{2}$ ومساحة
جسمها $\frac{r}{2}$ ط $\times \frac{r}{2} \times \frac{r}{2}$ او $\frac{r}{2}$ ط $\times \frac{r}{2}$ ط $\times \frac{r}{2}$ واذا كان قطرها الكامل $\frac{r}{2}$ يصير

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ فتقول مساحتها الجسمية الى } \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ و } \frac{1}{4} \text{ او } \frac{1}{4} \text{ ط } \frac{1}{4}$$

• (الدعوى السادسة عشرة النظرية) •

نسبة سطح الكرة الى مجموع سطح الاسطوانة المرسومة عليها (قاعدتا الاسطوانة داخل هذا المجموع) كنسبة عدد ٢ الى عدد ٣ والنسبة بين هذين الجسمين ايضا كذلك

(شكل ٢٧٠) اذا كان م ف د ك دائرة عظيمة في الكرة و ا ب د مربع المرسوم عليها و ا د ير ف م ك نصف الدائرة و ف ا م ك نصف المربع معا حول قطر ف ك فنصف الدائرة يرسم الكرة ونصف المربع يرسم الاسطوانة المرسومة فوق تلك الكرة

اقول ان ا د ارتفاع هذه الاسطوانة مساو لقطر الكرة ف ك وقاعدة الاسطوانة تساوي دائرة عظيمة • لان قطر ا ب مساو قطر م د فلذا كان السطح المحذب من الاسطوانة مساويا لحاصل ضرب محيط الدائرة العظيمة بقطرها (٤) وهذه المساحة هي عين مساحة سطح الكرة (١٠) ومن هاتين ان سطح الكرة مساو لمحذب الاسطوانة المرسومة عليها

لكن حيث ثبت ان سطح الكرة مساو لاربعة دوائر عظام فكان محذب الاسطوانة المرسومة عليها مساويا لاربعة دوائر عظام فاذا زيد على هذا مقدار القاعدتين اعني الدائرتين العظيمتين بصير مجموع سطح الاسطوانة المرسومة عليها مساويا لست دوائر عظام ومن ثمة كانت نسبة سطح الكرة الى مجموع سطح الاسطوانة المرسومة عليها كنسبة عدد ٤ الى عدد ٦ او كنسبة عدد ٢ الى عدد ٣ وهذا ما اردنا اثباته وبه صار الشق الاول من هذه الدعوى مسلما

واما الشق الثاني فاقول حيث كانت قاعدة الاسطوانة المرسومة فوق الكرة مساوية لدائرة عظيمة وارتفاعها مساويا لقطرها صارت المساحة الجسمية من الاسطوانة مساوية لحاصل ضرب دائرة عظيمة في قطرها لكن مساحة جسم الكرة

مساوية لحاصل ضرب اربع دوائر عظام في ثلث نصف القطر (١٥) يعنى حاصل ضرب دائرة عظيمة في أربعة اثلاث نصف القطر او $\frac{4}{3}$ القطر فلذا كانت نسبة الكرة الى الاسطوانة المرسومة عليها كنسبة عدد ٤ الى عدد ٣ ومن اجل ذلك ثبت المطلوب من ان تكون النسبة بين جسامه هذين الجسمين كنسبة سطحهما

• (تلييه) • اذا تصور كثير القواعد على ان تماس بجميع وجوه الكرة فيمكن النظر اليه بان يكون مركبا من اهرام قد اجتمعت رؤوسها في مركز الكرة ووجوه كثير القواعد المتعددة صارت لها قواعد ولا يتحقق ان الارتفاع المشترك في كافة تلك الاهرام هو نصف قطر الكرة فلذا كان كل هرم منها يساوى حاصل ضرب الوجه الذي صار قاعدة في ثلث القطر فالمساحة الجسمية من كثير القواعد الكامل تساوى حاصل ضرب سطحه في ثلث نصف قطر الكرة المرسومة داخله ويرى من هذا ان نسبة المساحة الجسمية من كثير القواعد المرسومة فوق الكرة كنسبة سطوحها ومن اجل ذلك ظهر ان ما ثبت في حق الاسطوانة المرسومة على الكرة ثبت ايضا في الاجسام المتعددة الاخر

وكذلك اشير في هذا الباب الى ان نسبة سطوح الكثير الاضلاع المرسومة فوق الدائرة كنسبة اطرافها يعنى ادوارها

• (الدعوى السابعة عشرة العملية) •

(شكل ٢٧١) طزيق استفراج قيمة الجسم الحاصل من دوران د م ر قطعة الدائرة مرة واحدة حول قطر خارج عنها

اذا انزل عودا ه ه و و على المحور وعود ح ح و و من مركز د على وتر د و ورسم نصف قطر د د و د فاجسم المرسوم

بقطاع ر ١٥ = $\frac{4}{3} \pi \times \frac{r}{2} \times \frac{r}{2} \times \text{اه}$ (١٥) والمرسوم بقطاع

د ١٥ = $\frac{4}{3} \pi \times \frac{r}{2} \times \frac{r}{2} \times \text{او}$ فلذا كان تفاضل هذين الجسمين اعنى المرسوم بقطاع

د ر = $\frac{4}{3} \pi \times \frac{r}{2} \times \frac{r}{2} \times (\text{او} - \text{اه}) = \frac{4}{3} \pi \times \frac{r}{2} \times \frac{r}{2} \times \text{هو}$

ولكن من كون مساحة الجسم المرسوم بمثلث $س ه و$ تساوي السابقين

$$\frac{r}{2} ط \times س ه و = \frac{r}{2} ط \times س ه و (١٤) \text{ ما زال الجسم المرسوم بقطعة رسم } س ه و = \frac{r}{2} ط \times س ه و$$

$$\times \left(\frac{r}{2} س ه و - \frac{r}{2} س ه و \right) \text{ ويكون في مثلث } س ه و \text{ القائم الزاوية } س ه و = \frac{r}{2} س ه و - \frac{r}{2} س ه و$$

$$= \frac{r}{2} س ه و = \frac{r}{2} س ه و \text{ فلماذا كان الجسم المرسوم بقطعة رسم } س ه و$$

$$\frac{r}{2} ط \times س ه و \times \frac{1}{2} س ه و \text{ او } \frac{1}{2} ط \times س ه و \times \frac{r}{2} \text{ وثبت المطلوب}$$

• (تنبيه) • نسبة الجسم المرسوم بقطعة رسم $س ه و$ الى الكرة التي قطرها $س ه و$

$$\text{كنسبة } \frac{1}{2} ط \times س ه و \times \frac{r}{2} \text{ الى } \frac{1}{2} ط \times س ه و \times \frac{r}{2} \text{ او كنسبة } س ه و$$

الى $س ه و$

• (الدعوى الثامنة عشرة النظرية) •

كافة القطع الكروية المحصورة بين المستويين المتوازيين مساحتها الجسمية تساوي مجموع حاصل ضرب ارتفاعها في نصف مجموع قاعدتيها ومساحة جسم الكرة التي قطرها هو الارتفاع المرسوم

(شكل ٢٧١) اذا كان $س ه و د و$ نصفي قطري قاعدتي القطعة واديرت

تلك القطعة حول $س ه و$ محور مساحة رسم $س ه و$ الدائرة على ان

يكون $س ه و$ ارتفاعها فالجسم الحادث من قطعة رسم $س ه و = \frac{1}{2} ط \times س ه و \times \frac{r}{2}$

$$\text{ط} \times س ه و \times \frac{r}{2} \text{ هو (١٧) وبما ان جسم المحروط الناقص المرسوم بشبه$$

$$\text{منصرف } س ه و = \frac{1}{2} ط \times س ه و \times \left(\frac{r}{2} س ه و + \frac{r}{2} س ه و + س ه و \times س ه و \right)$$

$$(٦) \text{ نصارت قطعة الكرة التي هي مجموع هذين الجسمين } = \frac{1}{2} ط \times س ه و \times س ه و$$

$$\left(\frac{r}{2} س ه و + \frac{r}{2} س ه و + س ه و \times س ه و \right) \text{ لكن اذا رسم رسم } س ه و$$

$$\text{موازيا لخط } س ه و \text{ يصير رسم } س ه و = س ه و - س ه و = س ه و = \frac{r}{2} س ه و$$

$$- س ه و \times س ه و + س ه و \times س ه و \text{ (٩ مقالة ٣) من اجل ذلك يكون } س ه و =$$

$$= \frac{r}{2} س ه و$$

$$\frac{r}{h} + \frac{r}{h} = \frac{r}{h} + \frac{r}{h} = \frac{r}{h} + \frac{r}{h} = \frac{r}{h} + \frac{r}{h}$$

فإذا وضع هذا المقدار مقام مربع r في العبارة الدالة على ما يساوي القطعة وحذف ما يلزم حذفه تصير المساحة الجانبية لتلك القطعة $\frac{1}{2} \times h \times r$

$(\frac{r}{h} + \frac{r}{h} + \frac{r}{h})$ وهذه العبارة تنقسم إلى قسمين أحدهما أن يكون

$$\frac{1}{2} \times h \times r \times (\frac{r}{h} + \frac{r}{h} + \frac{r}{h}) \text{ أو } h \times r \times (\frac{r}{h} + \frac{r}{h} + \frac{r}{h})$$

وهو نصف مجموع القاعدتين مضروباً في الارتفاع والآخر أن يكون $\frac{1}{2} \times h \times r$ أعني الكرة التي قطرها h (تنبيه ١٥) ومن ثمة ثبت المطلوب من أن تكون مساحة كل قطعة تساوي ما صرح به في رأس الدعوى

نتيجة إذا فقدت إحدى القاعدتين تصير القطعة حيث تذا ذات قاعدة واحدة فقط فلذا كان جسم كافة القطع الكروية ذات القاعدة يكافئ مجموع نصف الأسطوانة التي تصد القطعة بها قاعدة وارتفاعها والكرة التي قطرها ارتفاع تلك القطعة

• (تنبيه عمومي) •

إذا كان r نصف قطر قاعدة اسطوانة و h ارتفاعها فمساحة جسمها

$$\text{تكون } \pi r^2 \times h \text{ أو } \pi r^2 \times h$$

وإذا كان r نصف قطر قاعدة مخروط و h ارتفاعه فمساحة جسمه

$$\text{تكون } \pi r^2 \times \frac{h}{3} \text{ أو } \frac{1}{3} \pi r^2 \times h$$

وإذا كان r نصف قطري قاعدة مخروط ناقص و h ارتفاعه فمساحة

$$\text{جسمه } \frac{1}{3} \pi h (r^2 + r'^2 + rr')$$

وإذا كان r نصف قطر كرة فمساحة جسمها $\frac{4}{3} \pi r^3$

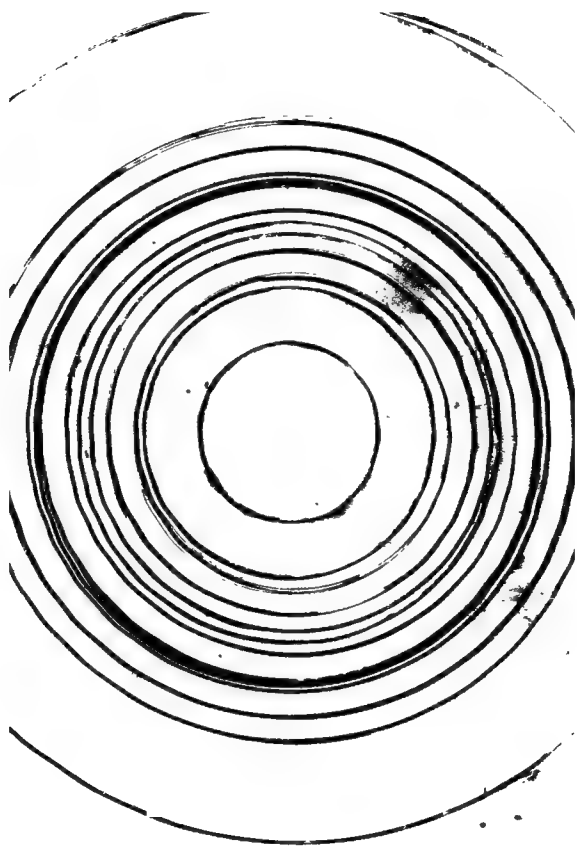
فإذا كان r نصف قطر قطاع كروي و h ارتفاع المنطقة التي هي قاعدته

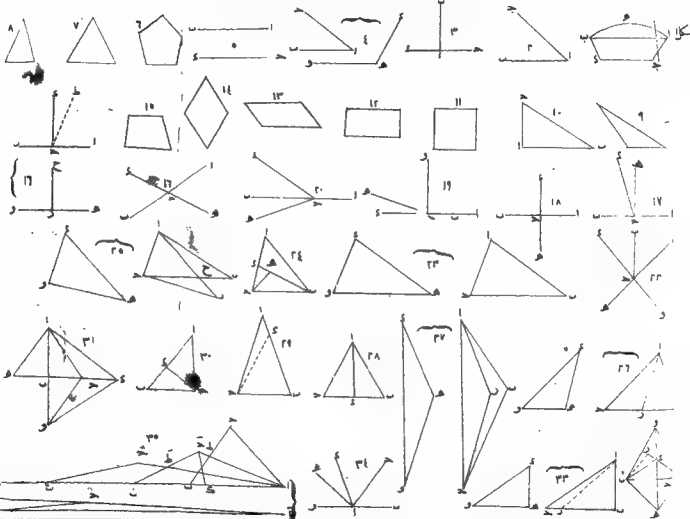
فمساحة جسمه تكون $\frac{1}{2} \pi r^2$ ط ع
 وإذا كان r و h قاعدتي قطعة كروية و c ارتفاعها فمساحتها
 الجسمية $(\frac{1}{2} \pi r^2 + c \times \frac{1}{2} \pi r^2)$ ط ع
 وإذا كانت القطعة الكروية ذات قاعدة واحدة فقط ومميت r فمساحة
 جسمها $\frac{1}{2} \pi r^2 + c \times \frac{1}{2} \pi r^2$ ط ع وهذا آخر مترجمة

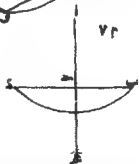
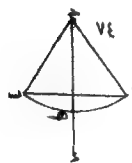
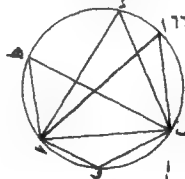
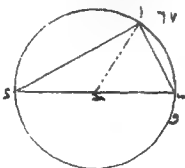
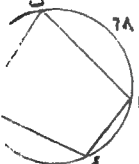
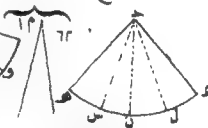
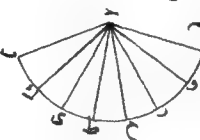
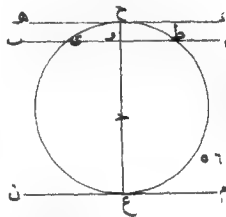
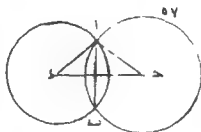
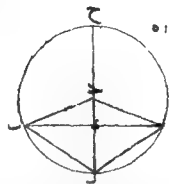
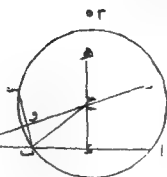
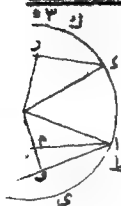
بمدح الله على آلانه والصلوة والسلام على خاتم أنبيائه يقول راجي غفران
 الأوزار إبراهيم الدسوقي الملقب بـ عبد الغفار شيخ التصحيح بدار الطباعة أعانه
 الله على مشاق هذه الصناعة

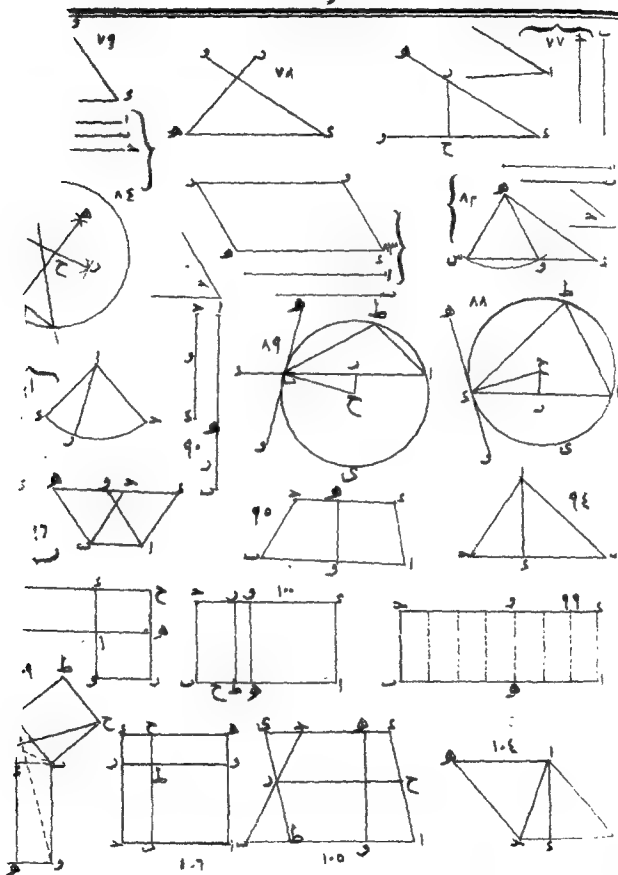
تم بعون الملك الوهاب طبع هذا الكتاب المستطاب طبعة ثالثة مستدركة ما فرط
 فيه من حادته مقابل على أصله الذي كان طبع عليه من وقت أن ترجمه حضرة
 عصمت أفندي عن الترجمة إلى العربية مع حضرة أحد دخوات المدارس على
 أفندي عزت بدون تصرف إلا في بعض الخطوط المتوازية بالطباعة العاصرة
 الزاهية الزاهرة المتوفرة دواحي مجددا المشرقة كواكب سعدا في ظل من
 تطارت الأنوار بقلباته وبلغ من كل وصف جليل حدانته ومحاطم الظلم بسنا
 صورته القمرية وأثبت مراسم العدل بحسن سيرته العصرية واسبل على أهل
 عاصمته غيث أنعامه واحسانه وشملهم بعظيم رافقه وامتنانه عزيز الديار
 المصرية وحامي حرمي حوزتها النبيلة جناب التمددي ذي القصر الجلي اسمعيل
 ابن إبراهيم بن محمد على أدام الله علينا إمامه ونشر على هام الخافقين أعماله
 وأطال عمر النجيلة الكرام وحرسهم بعينه القلاتام لاسيما الوزير الشهير
 النبيل الأصمعي ذي الجهد الأتيل والشرف الجليل رب المعارف المشهورة
 والعوارف المشكورة والرشد والاصابة والدولة والتجاية من هو باطن
 الثناء حقيق سعادة محمد باشا توفيق أكبر المجال الحضرة الخديوية وولي عهد
 الحكومة المصرية لازالت الأيام مضية بشمس علاء واليالي منيرة بيد وحلاء
 وكان طبعه المبعون وحسن تمثيله المصون مشهولا بإدارة من عليه أحسن اخلاقه

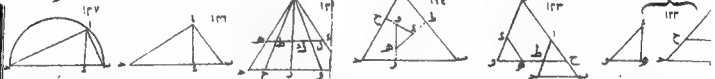
تنفى سعادة حسين بك حسنى مدير المطبعة والكاغد خانة اعلى الله قدره وشانه
 ونظارة وكيله السالك جادة سبيله من لم يزل اثمرة ذكائه يبعث - ضرة
 محمد أفندى حسنى وملاحظة ذى الرأى المسدد - ضرة أبى
 العينين أفندى أجد وكان الفراغ من طبعه ونشرته
 فى أوائل ثمانى الريعين من سنة تسع وثمانين وألف
 ومائتين من هجرة بينا عليه الصلاة والسلام
 وعلى آله وأصحابه الكرام ملاح
 بدو غمام وفاح مسك
 ختام أمين
 تم

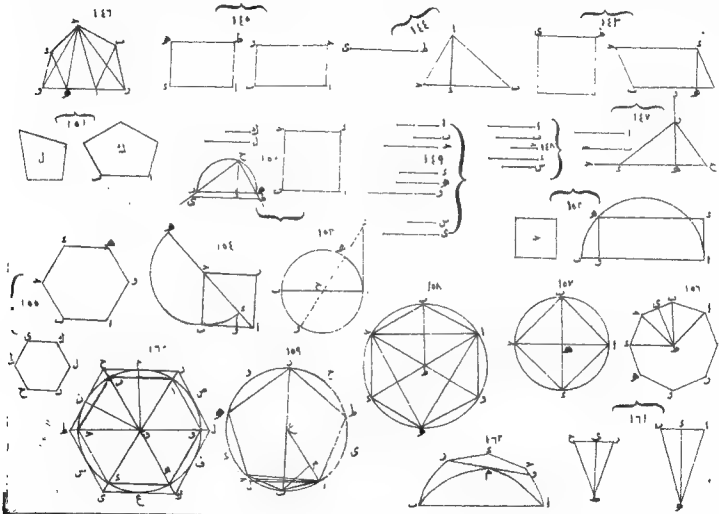


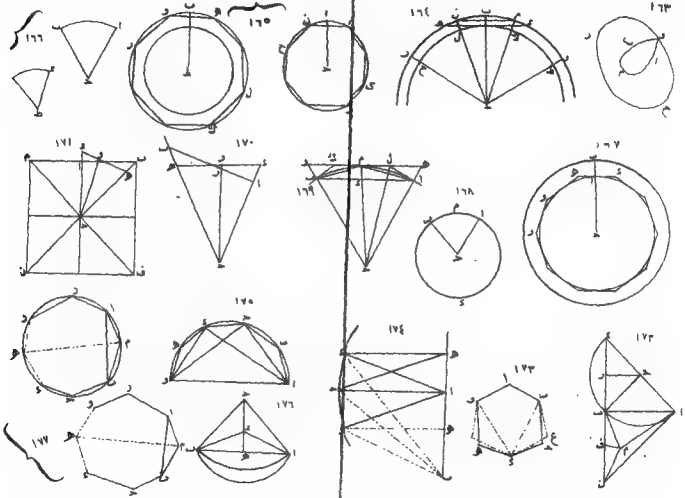


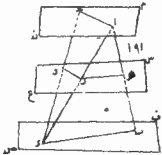
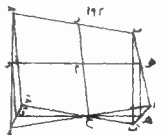
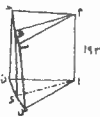
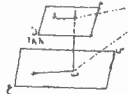
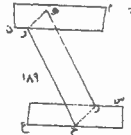
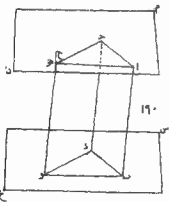
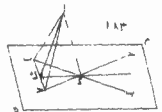
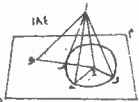
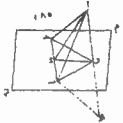
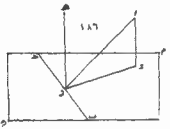
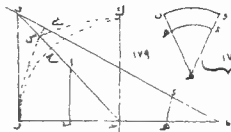
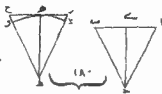


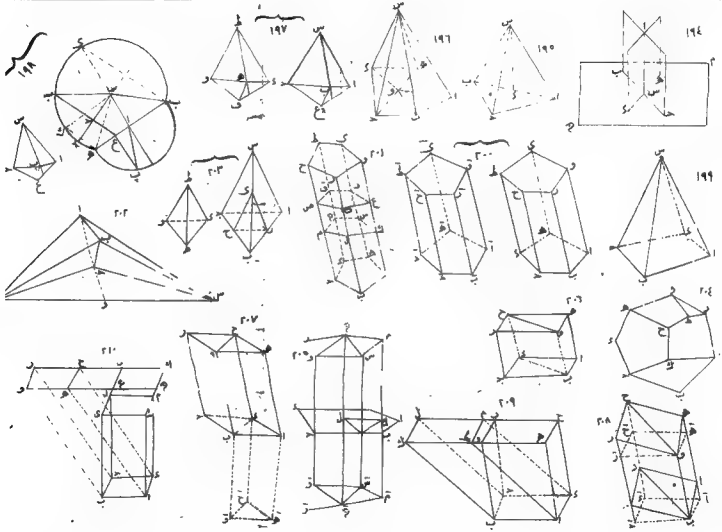


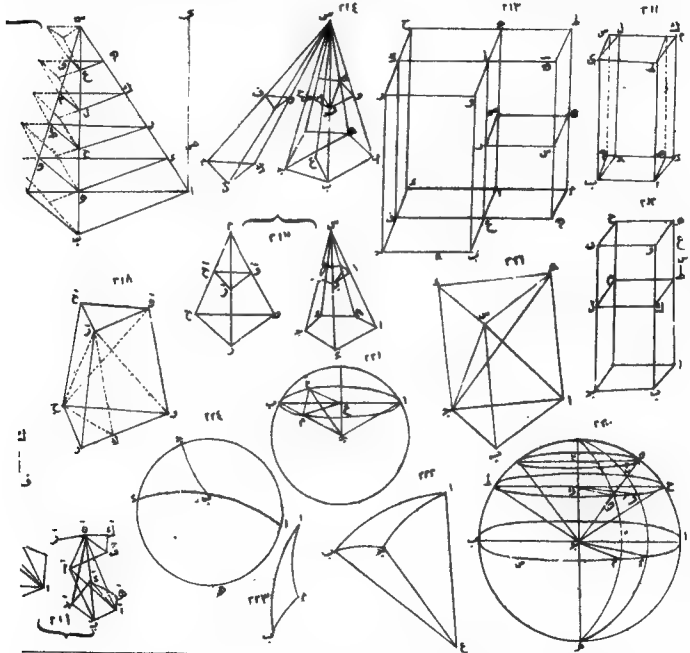


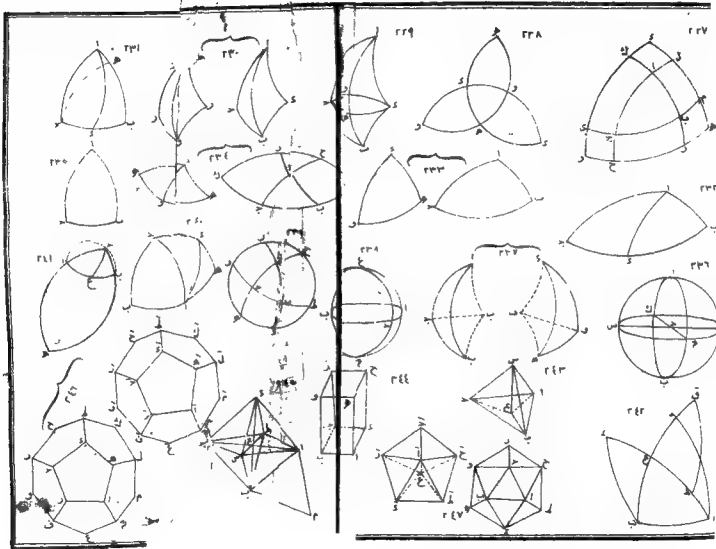


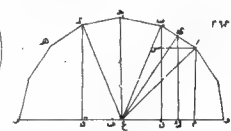
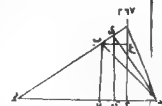
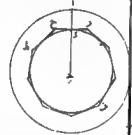
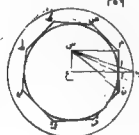
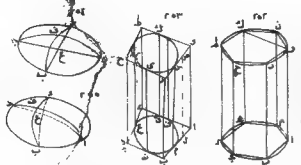


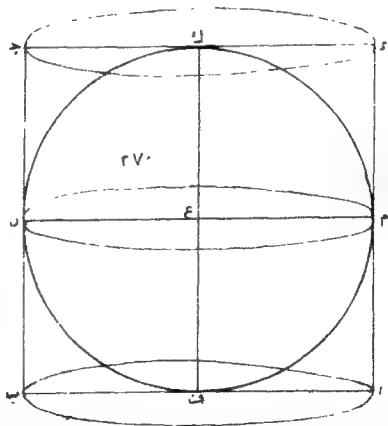
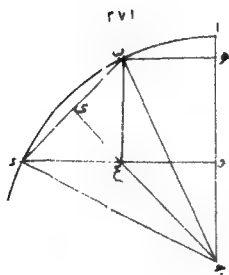
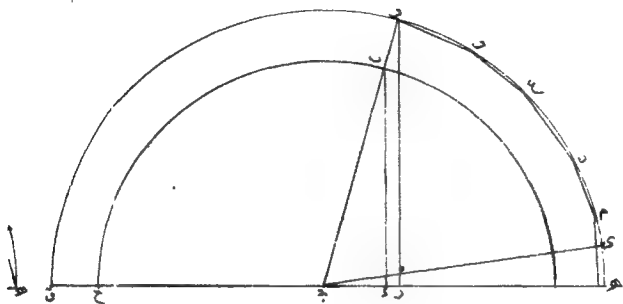




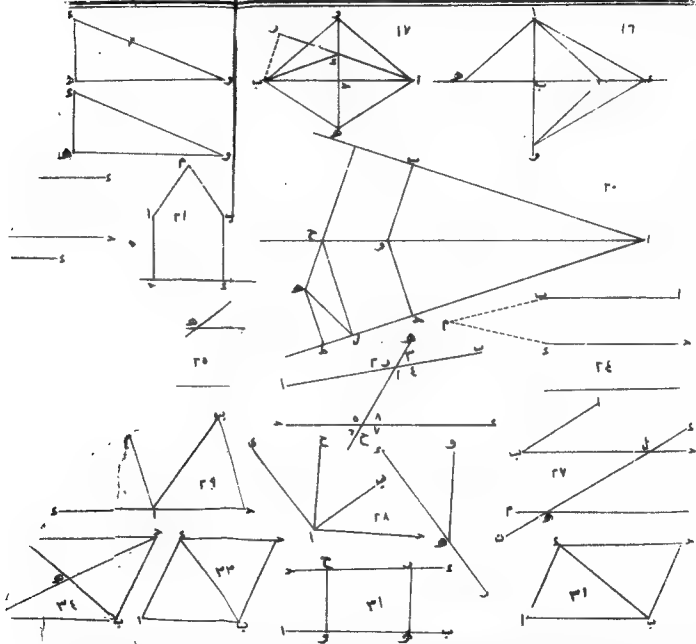




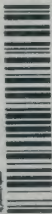




وحدة رابعة أشكال للمقالة الأولى من الدعوة السادسة عشر إلى آخر المقالة ونسرة الاشكال فيها كذا



Bibliotheca Alexandrina



0417462